2-3 طريقة الوضع الخاطئ False Position Method:

تعتمـــد طريقـــة الوضع الخاطئ بشكلٍ رئيسي على الخاصة الآتية: عوضاً عن اختيار النقطة c منتصف المجال $[a,b]$ في طريقة تنصيف المجال نختار x_2 نقطة تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين $f(a)$ و $f(b)$ مــع المحــور x ويكـون عنـدها الجـذر محصـوراً فـي أحـد المجـالين $[a,x_2],[x_2,b]$ حسب إشارة $f(x_2)$ ويمكن عندئذٍ حساب قيمة x_2 بالطريقة الآتية:

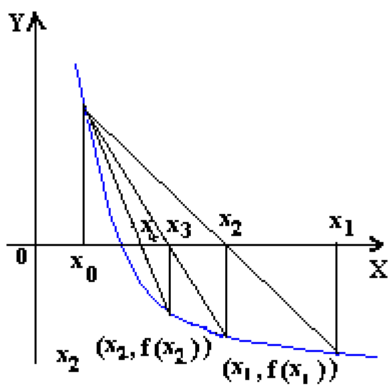
تُعطى معادلة القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $x_0=a, x_1=b$ بالعلاقة:

$$f(x)=f_1+\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x-x_1)$$

ومنه نجد أنّ:

$$x_2=x_1-\left(\frac{x_1-x_0}{f_1-f_0}\right)f_1 \qquad (7)$$

بعد الحصول على x_2 يمكن أن نعيد الحساب من أجل x_1 و x_2 فنحصل على قيمة تقريبية أفضل للجذر x_3 ونتابع بهذا الشكل.



الشكل 12: طريقة الوضع الخاطئ هندسياً

خوارزمية طريقة الوضع الخاطئ:

INPUT $\square > 0$ (tolerance)

m > 0 (maximum number of iterations)
x_0 , x_1 (so that $f_0 \cdot f_1 < 0$)

$f_0 = f(x_0)$; $f_1 = f(x_1)$; Set i=2 STEP 1
While $i \le m$ Do STEP 3 -7 STEP 2
Set $x_2 = x_1 - \left(\frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0}\right) f_1$; $f_2 = f(x_2)$ STEP 3
if $|f(x_2)| \le \varepsilon$, then OUTPUT x_2 , STOP. STEP 4
Set $i = i + 1$; STEP 5
if $f_2 \cdot f_1 < 0$ set $x_0 = x_2$; $f_0 = f_2$. STEP 6
set $x_1 = x_2$; $f_1 = f_2$. STEP 7
OUTPUT "The method failed after m iteration." STEP 8
STOP

مثال:

أوجد جذراً للتابع $f(x) = x^2 - 3$ في المجال $[1, 2]$ بطريقة الوضع الخاطئ بدقة $\varepsilon(f) = 0.01$.

الحل :

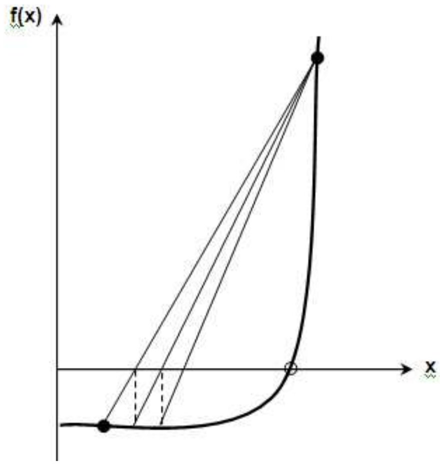
نطبق طريقة الوضع الخاطئ فنجد:

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$	**update**	$\lvert b-c \rvert$
1	1.0	2.0	-2.00	1.00	1.6667	-0.2221	a = c	0.6667
2	1.6667	2.0	-0.2221	1.0	1.7273	-0.0164	a = c	0.0606
3	1.7273	2.0	-0.0164	1.0	1.7317	0.0012	a = c	0.0044

الجدول:3 تطبيق طريقة الوضع الخاطئ على التابع $f(x) = x^2 - 3$

نلاحظ أنه من أجل ثلاثة تكرارات للخوارزمية نحصل على الدقة المطلوبة، في حين أنه يمكن الحصول على هذه الدقة في التكرار السادس لطريقـــة تنصـــيف المجال (المثال(2)).

الفرق بين طريقة تنصيف المجال وطريقة الوضع الخاطئ هــو أن طرفــي المجال في طريقة تنصيف المجال يمكن أن يتغيرا، في حين يبقـــى أحـــد طرفـــي المجال في طريقة الوضع الخاطئ ثابتاً إذا كان التابع مقعر، ويتغير الطرف الآخر مقترباً من الجذر، إلا أنه وعلى الرغم من أن طريقة الوضع الخاطئ تُعد تطـــويراً لطريقة تنصيف المجال إلا أن الأخيرة قد تتقارب في بعض الأحيان مـــن الجـــذر بشكل أسرع من طريقة الوضع الخاطئ (الشكل 13):



الشكل 13: حالة تكون فيها طريقة الوضع الخاطئ بطيئة التقارب

3-2-1 تحليل الخطأ:

مبرهنة (1):

ليكن التابع $f \in C^2[a,b]$، حيث $f: [a,b] \to R$ ويحقق: $f(\alpha)=0;\ \alpha \in [a,b]$.

فإذا كانت $x_n \in [a,b]$ و $x_n = b_n - \left(\frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}\right) f(b_n)$، عندئذٍ

$$\alpha - x_n = \lambda(\alpha - x_{n-1}) \qquad (8)$$

$$\lambda = \frac{\beta f''(\alpha)}{2f'(\alpha) + \beta f''(\alpha)}\ ;\ \beta = \begin{cases} a_n - \alpha & a_n \text{ remains fixed} \\ b_n - \alpha & b_n \text{ remains fixed} \end{cases}$$

و اذا تحقق $|\lambda| < 1$ فان طريقة الوضع الخاطئ متقاربة.

الإثبات:

باستخدام مبرهنة تايلور ننشر التابع f في جوار النقطة $x=x_0$ أي:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0)$$

من أجل $x=a_n$, $x_0=\alpha$ وبما أن $f(\alpha)=0$ نجد أن:

$$f(a_n)=(\alpha-a_n)f'(a_n)+\frac{1}{2}(\alpha-a_n)^2 f''(a_n)$$

وبشكل مشابه من أجل $x=b_n$ نجد

$$f(b_n)=(\alpha-b_n)f'(b_n)+\frac{1}{2}(\alpha-b_n)^2 f''(b_n)$$

اذاً

$$f(b_n)-f(a_n)=(b_n-a_n)f'(\alpha)+\frac{1}{2}f''(\alpha)\left[(\alpha-b_n)^2-(\alpha-a_n)^2\right]$$

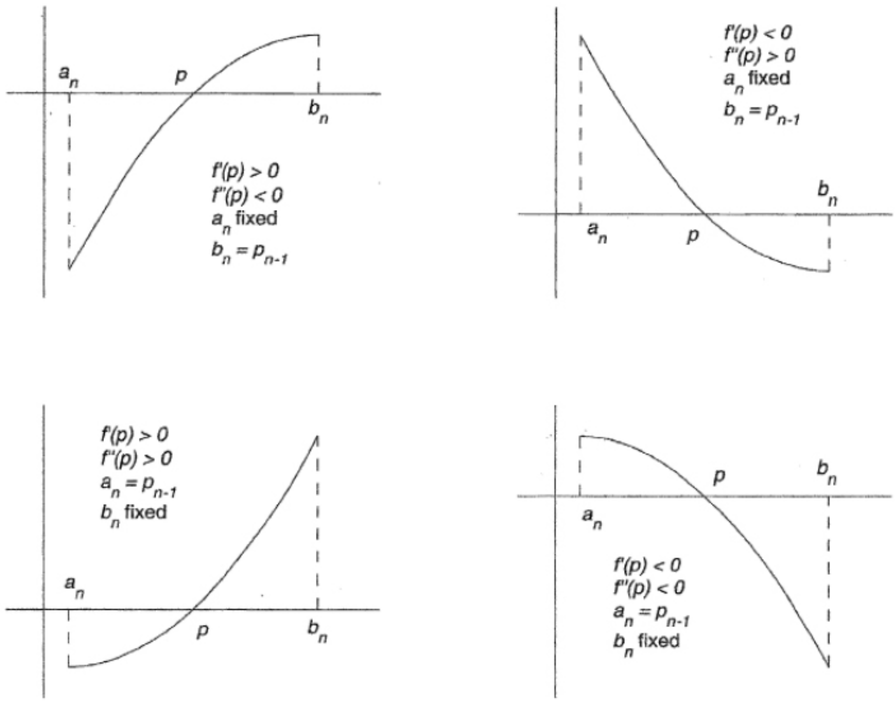
$$=(b_n-a_n)\left[f'(\alpha)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(b_n+a_n-2\alpha)\right] \qquad (9)$$

مرة ثانية نستخدم مبرهنة تايلور للتابعان $f(a_n)$ و $f(b_n)$ والتعويض في العلاقة (9) نجد:

$$x_n-\alpha \,;\, (b_n-\alpha)\left[1-\frac{f'(\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2}(b_n-\alpha)}{f'(\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2}(b_n+a_n-2\alpha)}\right] \qquad (10)$$

$$;\, (b_n-\alpha)(a_n-\alpha)\left[\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)+f''(\alpha)(b_n+a_n-2\alpha)}\right]$$

وقد لاحظنا ان أحد أطراف المجال بطريقة الوضع الخاطئ بعد عدد معين من التكرارات يصبح ثابتاً (ليس ضرورياً ان يحدث ذلك في باقي الطرائق التكرارية)، كما توضح الأشكال التالية:



الشكل 14: يوضح ثبات أحد أطراف المجال مع تغير شكل التابع $f\,(x)$

نفترض ان b_n هو الطرف الثابت، عندئذٍ :

$$E_{n-1} = x_{n-1} - \alpha = b_n - \alpha$$

و نعوض في العلاقة (10) فنجد:

$$E_n = E_{n-1}(a_n - \alpha)\left[\frac{f\,''(\alpha)}{2f\,'(\alpha) + f\,''(\alpha)(e_{n-1} + a_n - \alpha)}\right] \qquad (11)$$

بفرض

$$\lambda = \frac{\beta f\,''(\alpha)}{2f\,'(\alpha) + \beta f\,''(\alpha)}\;;\; \beta = \begin{cases} a_n - \alpha & a_n \text{ remains fixed} \\ b_n - \alpha & b_n \text{ remains fixed} \end{cases}$$

نجد:

$$E_n = \lambda E_{n-1}$$

اذا أردنا أن تتقارب $E_n = x_n - \alpha$ من الصفر ، فانه يجب ان يتحقـــق $|\lambda| < 1$،

كي نثبت ذلك نفترض ان a_n هو الطرف الثابت، عندئذٍ $\beta = a_n - \alpha$.

لدينا أربع حالات ، نناقش واحدة و الباقي يترك كتمرين للطلاب:

ليكن $\beta = a_n - \alpha < 0$ و $f''(\alpha) < 0$ عندئذٍ $(a_n - \alpha) f''(\alpha) > 0$، وبما ان $f'(\alpha) > 0$ ، اذاً $2f'(\alpha) + (a_n - \alpha) f''(\alpha) > (a_n - \alpha) f''(\alpha)$

و هكذا نجد : $0 < \dfrac{(a_n - \alpha) f''(\alpha)}{2f'(\alpha) + (a_n - \alpha) f''(\alpha)} = \lambda < 1$ ، و طريقة الوضع الخاطئ متقاربة دوماً.

2-2-3 تقدير الخطأ:

عند حساب جذر تابع، نقوم عملياً بحساب سلسلة من القيم التقريبية x_n، لذا فإننا نرغب في تقدير دقتها لنحدد الخطوة من الخوارزمية التي سنتوقف عندها عن التكرار.

بفرض

$$
\begin{aligned}
E_n &= x_n - \alpha \\
&= x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - \alpha \\
&= x_n - x_{n-1} + E_{n-1}
\end{aligned}
$$

ولدينا فرضاً $E_n = \lambda E_{n-1}$ حيث λ هي المذكورة في نص المبرهنة (1)، أو بشكل اخر

$$E_{n-1} = \frac{E_n}{\lambda} \tag{12}$$

$$E_n \approx \left| \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right| \left| x_n - x_{n-1} \right| \tag{13}$$

لكن عبارة λ تحوي مشتق $f(x)$ ، لذلك لنعتبر

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = \frac{(x_n - \alpha) - (x_{n-1} - \alpha)}{(x_{n-1} - \alpha) - (x_{n-2} - \alpha)}$$

$$= \frac{E_n - E_{n-1}}{E_{n-1} - E_{n-2}} \qquad (14)$$

$$= \frac{(\lambda - 1) E_{n-1}}{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) E_{n-1}} = \lambda$$

من المعادلتين (13)و(14) يتم تقدير الخطأ بطريقة الوضع الخاطئ، فمن أجل دقة معينة ε نفترض $\left|\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right| \left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon$، حيث نقدر قيمة λ من المعادلة (14)

مثال(5):

أوجد باستخدام طريقة الوضع الخاطئ جذراً للتابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$ المعرف $[1, 2]$ وبدقة $\varepsilon = 0.005$.

الحل:

n	x_n	$f(x_n)$	$\left\lvert\frac{\lambda}{\lambda - 1}\right\rvert \left\lvert x_n - x_{n-1}\right\rvert$	ملاحظات
0	1	1−	0	قيمة ابتدائية
1	2	9	0	قيمة ابتدائية
2	1.1	−0.5489999	0	
3	1.151743638	−0.2744007	0	
4	1.176840909	−0.1307425	0.02363823	التقدير الأول للخطأ
5	1.1886276732	−	0.01043745	

n	x_n	$f(x_n)$	$\left\lvert\frac{\lambda}{\lambda-1}\right\rvert \lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	ملاحظات
		0.0608758		
6	1.1940789112	− 0.0280409	0.00469037	تحققت الدقة المطلوبة
7	1.1965820882	− 0.0128522		

الجدول 4: تطبيق طريقة الوضع الخاطئ على التابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$