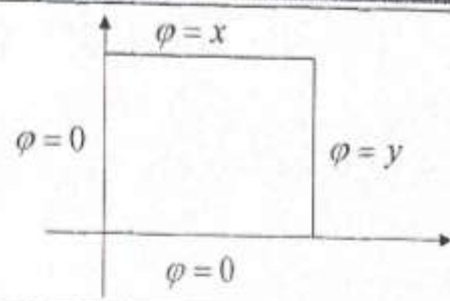
Chapter 1: Finite Difference Method for Poisson Equation

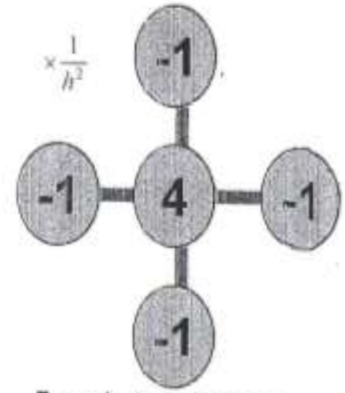
Example:

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$u \;=\; \varphi \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$



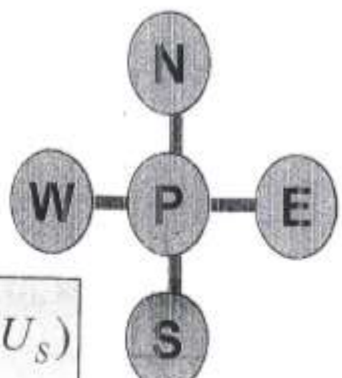
$$-\Delta_h U = -\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 4U_{i,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

Discrete Laplace Operator



5 point-scheme

5 point stencil

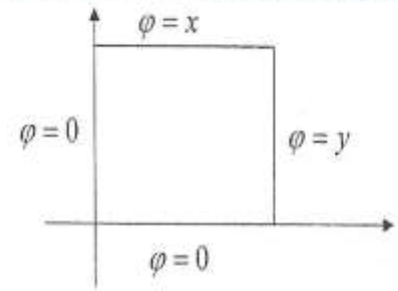


$$\frac{1}{h^2}(-U_E - U_W + 4U_P - U_N - U_S)$$

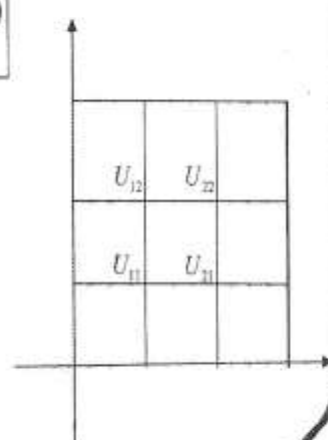
Chapter 1: Finite Difference Method for Poisson Equation

Example:

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$u \;=\; \varphi \;\; \text{on} \;\; \partial\Omega$$



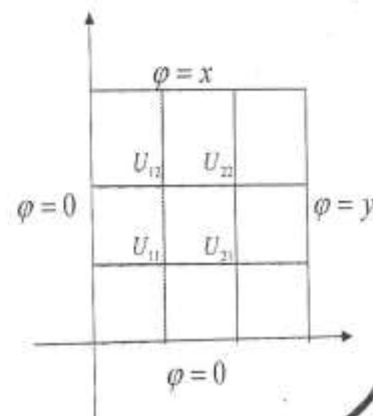
$$\boxed{-\Delta_h U = -\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 4U_{i,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0}$$



$$i = 1, j = 1: \quad -U_{12} - U_{10} + 4U_{11} - U_{21} - U_{01} = 0$$
$$i = 1, j = 2: \quad -U_{13} - U_{11} + 4U_{12} - U_{22} - U_{02} = 0$$
$$i = 2, j = 1: \quad -U_{22} - U_{20} + 4U_{21} - U_{31} - U_{11} = 0$$
$$i = 2, j = 2: \quad -U_{23} - U_{21} + 4U_{22} - U_{32} - U_{12} = 0$$

Chapter 1: Finite Difference Method for Poisson Equation

$$i=1, j=1: \quad -U_{12}-U_{10}+4U_{11}-U_{21}-U_{01}=0$$
$$i=1, j=2: \quad -U_{13}-U_{11}+4U_{12}-U_{22}-U_{02}=0$$
$$i=2, j=1: \quad -U_{22}-U_{20}+4U_{21}-U_{31}-U_{11}=0$$
$$i=2, j=2: \quad -U_{23}-U_{21}+4U_{22}-U_{32}-U_{12}=0$$



Chapter 1: Finite Difference Method for Poisson Equation

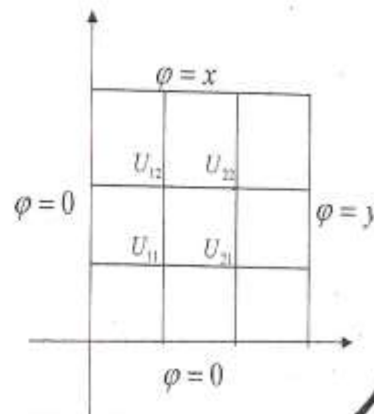
$$i=1, j=1:\quad -U_{12} - \cancelto{0}{U_{10}} + 4U_{11} - U_{21} - \cancelto{0}{U_{01}} = 0$$

$$i=1, j=2:\quad -\cancelto{1/3}{U_{13}} - U_{11} + 4U_{12} - U_{22} - \cancelto{0}{U_{02}} = 0$$

$$i=2, j=1:\quad -U_{22} - \cancelto{0}{U_{20}} + 4U_{21} - \cancelto{1/3}{U_{31}} - U_{11} = 0$$

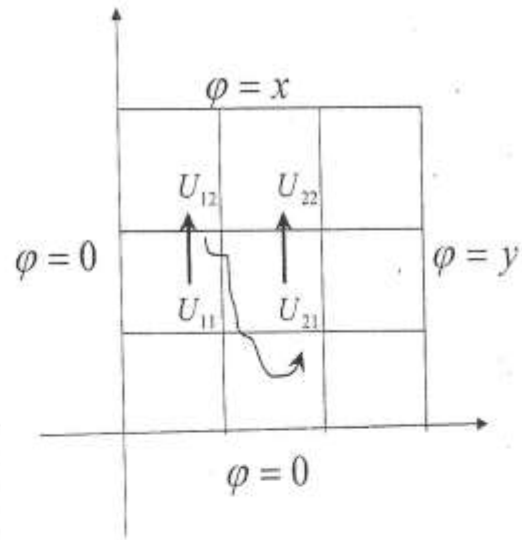
$$i=2, j=2:\quad -\cancelto{2/3}{U_{23}} - U_{21} + 4U_{22} - \cancelto{2/3}{U_{32}} - U_{12} = 0$$

$$
\begin{aligned}
-U_{12} - \quad + 4U_{11} - U_{21} - \quad &= 0 \\
-U_{11} + 4U_{12} - U_{22} - \quad &= 1/3 \\
-U_{22} \quad + 4U_{21} \quad - U_{11} &= 1/3 \\
-U_{21} + 4U_{22} \quad - U_{12} &= 4/3
\end{aligned}
$$



Numbering

$$-U_{12} - \quad +4U_{11} - U_{21} - \qquad = 0$$
$$-U_{11} + 4U_{12} - U_{22} - \qquad = 1/3$$
$$-U_{22} \qquad +4U_{21} \qquad -U_{11} = 1/3$$
$$-U_{21} + 4U_{22} \qquad -U_{12} = 4/3$$

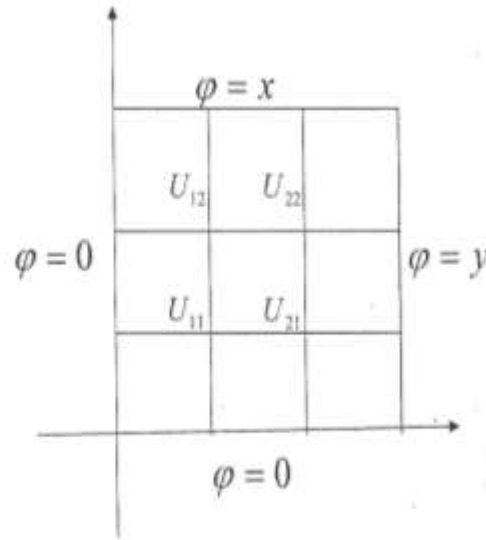


$$\left[\begin{array}{cc:cc} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ \hdashline -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$AU = b$$

Solving the Linear System

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$



$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{bmatrix}$$

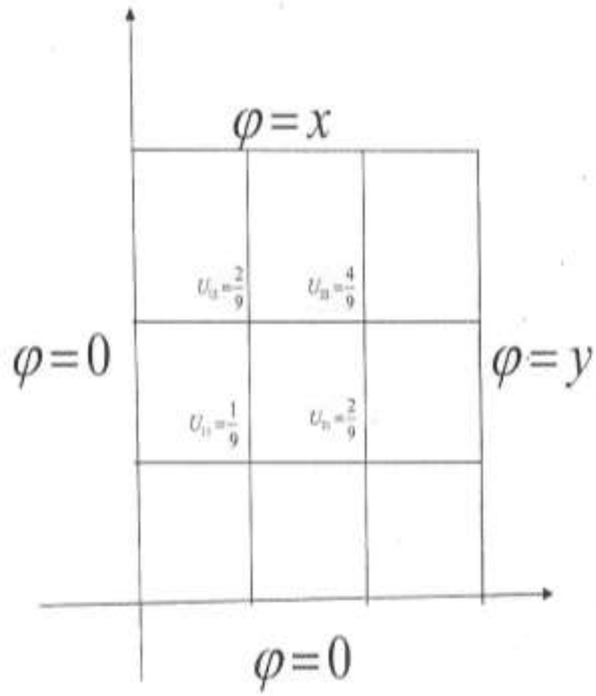
Exact Solution

Example :

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$
$$u \;=\; \varphi \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

Exact Solution

$$u(x,y) = xy$$



FDM →
$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{bmatrix}$$

تعريف

طريقة الفروق المنتهية تكون متماسكة إذا كان

$$\lim_{h\to 0} T(x) = \lim_{h\to 0} (pu - p_h u) = 0$$

غالباً يجب أن نستخدم طريقة الفروق المنتهية المتماسكة من أجل معظم نقاط الشبكة

إذا كان $T(x) = ch^p \;,\; p > 0$

عندها نقول عن الاقتطاع أنه من الرتبة p

حيث c هو عدد ثابت مستقل عن h ولكن يتعلق بالحل $u(x)$

لتحقق فيما إذا كانت طريقة الفروق المنتهية متماسكة أم لا نستخدم نشر تايلور

مثلاً من أجل طريقة الفروق المنتهية المركزية للمعادلة $u''(x) = f(x)$ لدينا:

$$T(x) = u''(x) - \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(x) + h.o.t = ch^2$$

حيث $c = \frac{1}{12} u^{(4)}(x)$

لذلك فإن طريقة الفروق المنتهية متماسكة والاقتطاع من الرتبة الثانية.

والآن لنختبر طريقة أخرى للفروق المنتهية من أجل المعادلة $u''(x) = f(x)$ ولدينا

forward $$\frac{u(x_i) - 2u(x_{i+1}) + u(x_{i+2})}{h^2} = f(x_i) \qquad i = 1, 2, \dots, n-2$$

$$\frac{u(x_{n-2}) - 2u(x_{n-1}) + u(b)}{h^2} = f(x_{n-1})$$

خطأ الاقتطاع عند x_{n-1} يحقق $T(x_{n-1}) = ch^2$

أما خطأ الاقتطاع المحلي عند نقاط الشبكة

$$T(x_i) = u''(x) - \frac{u(x_i) - 2u(x_{i+1}) + u(x_{i+2})}{h^2} = ch$$

لذلك فإن طريقة الفروق المنتهية متماسكة، ولكن إذا طبقنا طريقة الفروق المنتهية سنحصل على نتائج مختلفة.

ملاحظة (1):

$$f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i=\{f_i+2h\,f'(x_i)+2h^2f_i''+\frac{8}{6}h^3f_i'''+o(h^4)\}$$

$$-2\{f_i+hf_i'+\frac{h^2}{2}f_i''+\frac{1}{6}h^3f_i'''+o(h^4)\}+f_i$$

$$=h^2f_i''-h^3f_i'''+o(h^4)$$

$$f_i''=\frac{f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i}{h^2}+E$$

$$E=hf_i'''$$

ملاحظة (2):

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \\ u_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f(x_1)-\frac{u_a}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n)-\frac{u_b}{h^2} \end{bmatrix}$$

إن التناسق لا يعني عمل الفروق المنتهية فنحن نحتاج إلى شرط آخر لنحدد إذا كانت طريقة الفروق المنتهية متقاربة أم لا وهو شرط الاستقرار

من أجل المسألة النموذجية لدينا

ملاحظة (2) . $Au = F + T \qquad A\bar{U} = F \qquad A(u - \bar{U}) = T = -AE_r$

حيث A هي مصفوفة المعامل لمعادلات الفروق المنتهية

– و F المصدر المعدل المعبر عنه بالشروط الحدية. $\qquad \tau = AE$ الخطأ الحسابي

و T هو متجه خطأ الاقتطاع المحلي عند نقاط الشبكة

إذا كانت A ليست شاذة عندئذ

$$\|E\| = \|A^{-1}T\| \leq \|A^{-1}\|\,\|T\|$$

أما إذا كانت A شاذة عندئذ $\|E\|$ تكون كبيرة اختيارياً

إذاً طريقة الفروق المنتهية ليست متقاربة من أجل طريقة الفروق المنتهية المركزية

لدينا $\qquad \|E\| \leq \|A^{-1}\|\, h^2$

لذا الخطأ الكلي يتعلق بالخطأ المحلي و بـ $\|A^{-1}\|$

<u>تعريف :</u>

طريقة الفروق المنتهية للمعادلة التفاضلية الناقصية مستقرة إذا كانت المصفوفة A قلوبة وكان

$$\|A^{-1}\| \leq C \qquad \forall\ h < h_0$$

حيث $\qquad C,\ h_0$ ثوابت

نظرية : إذا كانت طريقة الفروق المنتهية مستقرة ومتماسكة فإنها متقاربة.

غالباً يكون من السهل برهان التماسك أما الاستقرار فهو أكثر صعوبة وقد يكون مستحيلاً

الآن سنبرهن التقارب لطريقة الفروق المنتهية المركزية للمعادلة $u''(x) = f(x)$

وسنحتاج للتمهيدية التالية :

مبرهنة :

لتكن A مصفوفة مثلثية متناظرة وأن $A \in R^{n\times n}$

حيث قطرها الرئيسي والثانوي ثوابت d, α فإن القيم الذاتية لـ A تعطى بالعلاقة

$$\lambda_j = d + 2\alpha \cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right) \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

والأشعة الذاتية المتعامدة المقابلة لها

$$x_k^j = \sin\left(\frac{\pi k j}{n+1}\right) \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

– و يمكن أن نبرهن المبرهنة بالإثبات المباشر لـ $Ax^j = \lambda_j x^j$

<u>نظرية :</u>

طريقة الفروق المنتهية المركزية للمعادلة $-u''(x) = f(x)$ مع باستخدام شرط ديرخليه تكون من المرتبة الثانية

ملاحظة

يمكن أن نحصل أيضاً على القيم الذاتية و الأشعة الذاتية لمعاملات المصفوفة عن طريق مسألة القيمة الذاتية لمسألة ستورم لوفيل

ملاحظة (2)

$$u''(x) + \lambda u = 0 \qquad , \quad u(0) = u(1) = 0$$

ويمكن بسهولة التحقق من أن القيم الذاتية هي

$$\lambda_k = (k\pi)^2 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

الأشعة الذاتية المقابلة هي

$$u_k(x) = \sin(k\pi x)$$

وعند نقاط الشبكة تكون من الشكل

$$u_k(x_i) = \sin(k\pi i h) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

هذه واحدة من الأشعة الذاتية لمعاملات المصفوفة ويمكن ايجاد القيم الذاتية المقابلة باستخدام التعريف $Ax = \lambda x$

ملاحظة (2)

إذا كانت $f \in L^2(\Omega)$ عندئذ الحل موجود ووحيد

الآن لنناقش كيف يمكن استخدام معادلة الفروق المنتهية لحل معادلة بواسون في 2D

$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$

حيث $(x,y) \in \Omega =]a,b[\times]c,d[$

والشروط الحدية ديرخليه

$u|_{\partial\Omega} = u_0$

الخطوة -1-

إنشاء شبكة ويمكن استخدام شبكة ديكارتية موحدة

$$x_i = a + i h_x \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m \;,\; h_x = \frac{b-a}{m}$$

$$y_j = c + j h_y \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n \;,\; h_y = \frac{d-c}{n}$$

نريد ايجاد الحل التقريبي u_{ij} من الحل الفعلي عند جميع نقاط الشبكة (x_i, y_j) حيث $u(x_i, y_j)$ مجهولة ، لذا فإنه يوجد $(m-1)(n-1)$ مجهول من أجل شرط ديرخليه الحدي.

الخطوة -2-

نستبدل المشتقات الجزئية بصيغة الفروق المنتهية باستخدام قيم الدالة عند نقاط الشبكة لنحصل على

$$\frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{(h_x)^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{(h_y)^2} \quad (*)$$

$$= f_{ij} + T_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m-1 \\ j = 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

حيث $f_{ij} = f(x_i, y_j)$

خطأ الاقتطاع المحلي يحقق

$$T_{ij} \sim \frac{(h_x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{(h_y)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

$$h = \max \{h_x , h_y\}$$

اقتطاع الفروق المنتهية يكون متماسك إذا كان

$$\lim_{h \to 0} \| T \| = 0$$

لذا فإن الاقتطاع متماسك من الدرجة الثانية .

إذا أزلنا الخطأ من المعادلة ✱ واستبدلنا الحل الفعلي $u(x_i , y_j)$ بالحل التقريبي u_{ij} وصولاً المعادلات الخطية

$$\frac{U_{i-1j} + U_{i+1j}}{(h_x)^2} + \frac{U_{ij-1} + U_{ij+1}}{(h_y)^2} - \left(\frac{2}{(h_x)^2} + \frac{2}{(h_y)^2}\right) u_{ij} = f_{ij}$$

طريقة الفروق المنتهية عند نقاط الشبكة (x_i , y_j) تتضمن خمس نقاط (الشمال - الجنوب - الغرب - الشرق - المركز)

- حل المعادلات الخطية للحصول على الحل التقريبي عند نقاط الشبكة
- تحليل الخطأ؟

شكل متجه مصفوفة لمعادلات الفروق المنتهية ،

لدينا في شكل متجه مصفوفة $A u = F$ المجهول هو عبارة عن متجه ذات بعد واحد

ومن أجل معادلة بواسون ذات البعدين تكون المجاهيل u_{ij} هي متجه من بعدين لذا يجب

ترتيبها بحيث نحصل على متجه من بعد واحد ويجب أيضاً أن نرتب معادلات الفروق المنتهية

ونستخدم نفس الترتيب من أجل المعادلات والمجاهيل .

ويوجد طريقتين مستخدمتين للترتيب ١- الترتيب الطبيعي ٢- ترتيب (red and black)

7	8	9	
4	5	6	
1	2	3	

The natural ordering

4	9	5	
7	3	8	
1	6	2	

The red and black ordering

الترتيب الطبيعي للأسطر (The natural row ordering)

$$k = i + (m-1)(j-1) \qquad i = 1,2,\dots, m-1$$
$$j = 1,2,\dots, n-1$$

سنستخدم المثال التالي لإثبات الشكل المتجزئ المصفوفي لمعادلة الفروق المنتهية

نفرض أن

$$h_x = h_y = h \quad , m = n = 4$$

إذا سنحصل على 9 معادلات و 9 مجاهيل

معاملات المصفوفة هي (9×9)

لنكتب الشكل المتجه المصفوفة نستخدم المتجه x ذو دليل واحد للتعبير عن المجهول U_{ij}

$$x_1 = U_{11} \;,\; x_2 = U_{21} \;,\; x_3 = U_{31} \;,\; x_4 = U_{12}$$

$$x_5 = U_{22} \;,\; x_6 = U_{32} \;,\; x_7 = U_{13} \;,\; x_8 = U_{23} \;,\; x_9 = U_{33}$$

إذا رتبنا المعادلات بنفس الطريقة التي رتبنا بها المجاهيل عندئذ يكون لدينا 9 معادلات من طريقة الفروق المنتهية المركزية

$$\frac{1}{h^2}(-4x_1 + x_2 + x_4) = f_{11} - \frac{U_{01} + U_{10}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5) = f_{21} - \frac{U_{20}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_2 - 4x_3 + x_6) = f_{31} - \frac{U_{30} + U_{41}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_1 - 4x_4 + x_5 + x_7) = f_{12} - \frac{U_{02}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_2 + x_4 - 4x_5 + x_6 + x_8) = f_{22}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_3 + x_5 - 4x_6 + x_9) = f_{32} - \frac{U_{42}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_4 - 4x_7 + x_8) = f_{13} - \frac{U_{03} + U_{14}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_5 + x_7 - 4x_8 + x_9) = f_{23} - \frac{U_{24}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2}(x_6 + x_8 - 4x_9) = f_{33} - \frac{U_{34} + U_{43}}{h^2}$$

والآن يمكننا كتابة معادلات المصفوفة بسهولة

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} B & I & 0 \\ I & B & I \\ 0 & I & B \end{bmatrix}$$

حيث I مصفوفة واحدية من الرتبة 3×3

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

طريقة الفروق المنتهية

من أجل شبكة عامة من البعد $n\times n$ نحصل على

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} B & I & & \\ I & B & I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & I & B \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن A- مصفوفة معرفة موجبة ومتناظرة

لذلك تكون A غير شاذة ويوجد حل وحيد

يفيد شكل هذه المصفوفة لفهم بنية جملة المعادلات الخطية، ويمكن أن تكون ضرورية إذا كانت الطريقة المباشرة أو تقنيات المصفوفة المتفرقة مستخدمة لحل الجملة، لكن من المفيد أكثر في بعض الأحيان استخدام جملة وسيطين (i,j) خاصة إذا كانت الطريقة التكرارية مستخدمة لحل الجملة.

القيم الذاتية والأشعة الذاتية يمكن أن تكون مؤشرة بدليلين (p,k) متعلقان بأرقام الموجه باتجاه x,y

$u^{p,k}$ هو الشعاع الذاتي الذي يقابل الدليلين (p,k) وهو يملك n^2 عنصر من أجل مصفوفة من البعد $n\times n$ ومن الشكل السابق.

$$u_{ij}^{p,k} = \sin(p\pi ih)\sin(k\pi jh) \quad , \quad i,j=1,2\dots n$$

ومن أجل $p,k = 1,2,\dots,n$ تكون القيم الذاتية المقابلة

$$\lambda^{p,k} = \frac{2}{h^2}\left(\cos(p\pi h) - 1) + \cos(k\pi h - 1)\right)$$

أقل قيمة مهيمنة للقيم الذاتية (الأصغر حجماً)

$$\lambda^{1,1} = -2\pi^2 + o(h^2)$$

القيمة المهيمنة للأشعة الذاتية (الأكبر حجماً)

$$\lambda^{n/2,n/2} \sim -\frac{8}{h^2}$$

نلاحظ أن القيمة المهيمنة و الأقل هيمنة للقيم الذاتية هي ضعفي الموجودة في حالة بعد واحد

لذلك نحصل على التقريب التالي:

$$\|A\|_2 \sim \max|\lambda^{p,k}| = \frac{8}{h^2} \qquad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min|\lambda^{p,k}|} \sim \frac{1}{2\pi^2}$$

هي متقاربة

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 \sim \frac{4}{\pi^2 h^2} = o(n^2)$$

نلاحظ أن العدد الشرطي يماثل الموجود في حالة البعد الواحد وبما أن العدد الشرطي

يعتبر كبيراً يجب أن نضاعف الدقة لتقليل آثار أخطاء التدوير .

سنعالج المسألة بدقة، لكن بالنسبة لـ $\| \cdot \|_\infty$

نعلم أن $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,\dots n} \left\{ |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{in}| \right\}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & -- & -- & a_{nn} \end{bmatrix}$$

في حالة (1-D)

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ \vdots & & & & & & \\ & & -- & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & --- & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

مبرهنة: إن $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$

وذلك خطأ $\|A^{-1}\|_\infty \leq C$

٢- التماسك

$$\|T\| = \left\| \frac{1}{12} h^2 u^{(4)} + O(h^4) \right\|$$

$$= \|O(h^2)\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

ب-

$$\|E\| \leq \|A^{-1}\| \, \|T\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

ب- حالة (2-D)

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

$$(x,y) \in \,]0,a[\times]0,b[$$

$$u\big]_{\partial\Omega} = g$$

1 الاتساق

$$T = \frac{h_x^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, y_i) + \frac{h_y^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, y_i) + O(h_x^4) + O(h_y^4)$$

$$= O(h^2) \quad ; \quad h_x = h_y = h$$

$$\|T\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

وبالتالي متسقة

2 الطريقة مستقرة

$$u(x,y) = \frac{a^2+b^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{a^2+b^2}{16}$$

$$\|E\|_\infty \le \|A^{-1}\|_\infty \|T\|$$

$$\le \frac{a^2+b^2}{16}\|T\| = O(h^2) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

إذاً متقاربة.