المعادلات التفاضلية الجزئية

طريقة الفروق المنتهية	طريقة المفاهيم النظرية	المعادلات التكاملية ، طريقة ADM

٣-١ طريقة ADM (Adomain Decomposition Method)

تعتمد هذه الطريقة على التكرار بحيث نبدأ النقطة الثابتة أولاً ومع استخدام سلسلة تايلور ثانياً

- لنفرض أن الحل $u(x,y)$ يأخذ الشكل التالي

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)} \quad (1)$$

حيث :

$\underset{n\geq 0}{\vdots}\; u_n(x,y)$ الحلول الناتجة بشكل تكراري

لنكتب لدينا المعادلة الخطية التالية

$$\text{②}\quad \boxed{Lu + Ru = g}$$

مثال $\underbrace{u_x + u_y = x+y}_{L_x u + L_y u = g}$

حيث: L المؤثر التفاضلي

$$L^{-1} = \int (\quad) dx \Leftarrow L = \frac{d}{dx}$$

وبالتالي بالعودة إلى المعادلة ② نأخذ L^{-1} للطرفين :

$$L^{-1}(Lu+Ru) = L^{-1}(g)$$

فينتج لدينا :

$$u = -L^{-1}(Ru) + L^{-1}(g)$$

$$\boxed{u = f - L^{-1}(Ru)}\quad \text{③}$$

حيث :

$f = L^{-1}(g)$ الحدود التي تظهر من مكاملة الدالة g وتطبيق الشروط الحدية فيها

نعوض ③ في ① فنجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = f - L^{-1}(Ru)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L^{-1}\left(R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right)$$

$$u_0 + u_1 + \cdots\cdots = f - L^{-1}\left(R(u_0 + u_1 + \cdots\cdots)\right) \quad ⑤$$

الآن :

ننشئ العلاقة التكرارية المناسبة

$$u_0 = f$$
$$u_{k+1} = -L^{-1}(R\,u_k) \quad k \geqslant 0$$

وعندئذٍ يصبح الحل من الشكل :

$$u(x,y) = f - \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}(R\,u_n(x,y))$$

مثال :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية ذات البعد الواحد :

$$u''(x) = x\,u(x)$$
$$u(0) = A$$
$$u'(0) = B$$

- الحل -

إذا طبقنا المؤثر التفاضلي

$$Lu = x\,u$$
$$L = \frac{d^2}{dx^2} \Rightarrow L^{-1} = \int_0^x\int_0^x (\quad)\,dx\,dx$$

ومنه:

$$\int_0^x \int_0^x u''(x)\,dx = \int_0^x \int_0^x (xu)\,dx\,dx$$

$$= L^{-1}(xu)$$

$$\int_0^x \left(u'(x)\Big|_0^x\right) dx = L^{-1}(xu)$$

$$\int_0^x (u'(x) - u'(0))\,dx = L^{-1}(xu)$$

$$u(x)\Big|_0^x - Bx\Big|_0^x = L^{-1}(xu)$$

$$u(x) - u(0) - Bx = L^{-1}(xu)$$

$$u(x) = A + Bx + L^{-1}(xu)$$

سنفرض أن:

$$u_0 = A + Bx$$

ونفرض أيضاً أن:

$$u_{k+1} = L^{-1}(x u_k) \quad k \geq 0$$

$$u_1 = L^{-1}(x u_0) = L^{-1}(x(A + Bx))$$

$$= L^{-1}(Ax + Bx^2)$$

$$= \int_0^x \int_0^x (Ax + Bx^2)\,dx$$

$$u_1 = A\frac{x^3}{6} + \frac{Bx^4}{12}$$

ومنه

$$u_2 = \frac{Ax^6}{180} + \frac{Bx^7}{504}$$

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

$$= A\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right)$$

$$+ B\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right)$$

مثال ②:

$$u_x + u_y = x + y$$

$$u(0,y) = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

الحل: نعيد كتابة المعادلة التفاضلية باستخدام المؤثر التفاضلي

$$L_x u + L_y u = x + y$$

$$L_x u = x + y - L_y u$$

$$L_x u = x + y - L_y u$$

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad L_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

نكامل الطرفين بالنسبة لـ x

$$L^{-1}(L_x u) = L_x^{-1}(x+y) - L_x^{-1}(L_y u)$$

$$\int_0^x (L_x u) = \int_0^x (x+y) - \int_0^x (L_y u)$$

$$u(x,y) - \cancel{u(0,y)} = L_x^{-1}(x+y) - L_x^{-1}(L_y u)$$

صفر

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx - L_x^{-1}\left(L_y(u)\right)$$

$$u_0(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx$$

$$u_{k+1} = -L_x^{-1}\left(L_y(u_k)\right) \quad ; k \geq 0$$

$$u_1 = -\int_0^x x\,dx = \frac{-x^2}{2}$$

$$u_2 = -\int_0^x 0 \quad dx$$

ومنه: $u_k = 0$ وذلك $\forall K \geq 2$

$$u(x,y) = u_0 + u_1$$

$$u(x,y) = xy$$

وهو الحل الفعلي

مثال ③ :

$$u_x + u_y = x^2 + 4xy + y^2$$

$$u(0,y) = u(0,x) = 0$$

* الحل *

$$L_x u = x^2 + 4xy + y^2 - L_y u$$

حيث :

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad L_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

نطبق L_x^{-1} :

$$L_x^{-1} = \int_0^x (\quad)\,dx$$

$$u(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2x^2y + y^2x - L_x^{-1}(L_y u)$$

$$\sum_0^\infty u_n = \frac{x^3}{3} + 2x^2y + y^2x - L_x^{-1}\left(L_y\left(\sum_0^\infty u_n\right)\right)$$

$$u_0 + u_1 + \cdots\cdots = \frac{x^3}{3} + 2x^2y + y^2x - L_x^{-1}(L_y(u_0 + \cdots\cdots))$$

$$u_0 = \frac{x^3}{3} + 2x^2y + y^2x$$

$$u_k = -L_x^{-1}(L_y u_k) \quad , k \geq 0$$

بالحساب نحصل على :

$$u_1 = -yx^2 - \frac{2x^3}{3} \quad , \quad u_2 = \frac{x^3}{3} \quad , \quad u_3 = 0$$

$$u_K = 0 \quad ; \forall K \geq 3$$

ومنه نحصل على :

$$u(x,y) = \underbrace{\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2y + y^2x\right)}_{u_0} + \underbrace{\left(-yx^2 - \frac{2x^3}{3}\right)}_{u_1} + \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{u_2}$$

$$= x^2y + xy^2$$

وهو الحل المضبوط

[٢-٢] طريقة VIM (Variational Iteration Method)

التغير المتكرر

سنقوم بشرح الطريقة من خلال المثال التالي :

ص 7

نشتق على أن تغير الحل يساوي الصفر .

$$u_{n+1} - u_n = \Delta u_{n+1}$$

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = x\,y} \quad (1)$$

معادلة بواسون (2-D)

والشروط الحدية هي

$$u(0,y) = 0$$

$$u(\pi,y) = \frac{\pi y^3}{6}$$

$$u(x,\pi) = \frac{1}{6} x \pi^3 + \sin(x)\sinh(x)$$

حيث:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية (1) بالشكل التكراري ولكن بمفهوم آخر عن الطريقة السابقة وهو مفهوم مضاريب لاغرانج والتي سنرمز لها بـ λ

الخطوة الأولى : هدفنا إيجاد λ التي تحقق المعادلة التالية :

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^y \lambda(\tau)\left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial \tau^2} - x\tau\right]d\tau$$

الخطوة الثانية :

تعتمد طريقة (VIM) على أخذ التغير δ للطرفين

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta\int_0^y \lambda(\tau)\left[\underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x,\tau)}{\partial x^2}}_{0} + \frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial \tau^2} - \underbrace{x\tau}_{0}\right]d\tau \quad (3)$$

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta\int_0^y \underbrace{\lambda}_{u}\, \underbrace{\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}\,d\tau}_{dv}$$

حيث $\tilde{u}_n$ لأنه التغير المقيد

$$= \;+\delta\left\{\left[\lambda \frac{\partial u_n}{\partial \tau}\right]_0^y - \int_0^y \underbrace{\lambda'}_{u}\, \underbrace{\frac{\partial u_n}{\partial \tau}\,d\tau}_{dv}\right.$$

$$= \quad -\left[[\lambda' u_n]_0^y + \lambda'' u_n\right]$$

الخطوة الثالثة :

ندخل التكامل ع λ و إلى جميع الحدود ونكامل بالتجزئة فنحصل ع ما يلي :

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n - \delta \lambda'(\tau)\, u_n(x,\tau)\Big|_{\tau=y}$$

$$+\, \delta \lambda(\tau) \frac{\partial u_n}{\partial \tau}(x,\tau)\Big|_{\tau=y}$$

$$+ \int_0^y \delta \lambda''(\tau)\, u_n(x,\tau)\, d\tau$$

الخطوة الرابعة :

التغير للحل يجب أن يكون مساوياً للصفر وبالتالي نستنتج استناداً

ل لمعادلات الاستقرار stationary boundary

$$\delta u_n = 0 \Rightarrow [(1-\lambda')]_{\tau=y} = 0 \quad (4)$$

$$\delta\left(\frac{\partial u_n}{\partial \tau}\right) = 0 \Rightarrow [\lambda(\tau)]_{\tau=y} = 0 \quad (5)$$

$$\lambda''(\tau)]_{\tau=y} = 0 \quad (6)$$

$\lambda = A+B$

$\lambda' = B$

$\lambda = A - y$

$\lambda]_{\tau=y}$

من (4) و (5) و (6) نجد أن $\lambda = \tau - y$

نعود الآن إلى المعادلة (2)

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^y (\tau - y)\left[\frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n(x,\tau)}{\partial \tau^2} - x\tau\right] d\tau$$

نختار الشرط الابتدائي بحيث يحقق الشروط الحدية المعطاة :

$$u_0(x,y) = \frac{1}{6} x y^3 + y \sin(x) \longleftarrow$$ يحقق الشروط الحدية المعطاة

$$u_1(x,y) = \frac{1}{6} x y^3 + y \sin(x) + \frac{1}{6} y^3 \sin x$$

ومنه

$$u = u_0 + u_1$$
$$= \frac{1}{6} x y^3 + y \sin(x) + \frac{1}{6} x y^3 + y \sin(x) + \frac{1}{6} y^3 \sin x$$

مثال 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - u(1-u) = 0$$
$$0 \leq x \leq 1$$
$$t > 0$$

$$u(x,0) = g(x) = e^{-x}$$

- الحل -

باستخدام VIM :

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda \{ u_{ns} + u_n u_{nx} - u_n(1-u_n) \} ds$$

$\delta(u_n u_{nx}) = 0 \leftarrow$ مقيد

نطبق التكامل بالتجزئة وشروط الاستقرار الحدية نجد $\lambda = -1$

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \{ u_{ns} + u_n u_{nx} - u_n(1-u_n) \} ds$$

$$u_0(x,t) = e^{-x}$$

ومنه

$$u_1(x,t) = e^{-x}(1+t)$$

وبالتالي نحصل ع :

$$u(x,t) = e^{-x}\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\dots\dots\right)$$

$$u(x,t) = e^{t-x} \quad \rightarrow \quad \text{الحل القليل}$$

مثال ١٣

معادلة $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ①

$$0 \le x \le 1, \quad t > 0$$

شرط الابتدائي $u(x,0) = g(x) = \sin(2\pi x)$ ②

شرط الحدي $u(0,t) = u(1,t) = 0$ ③

وللحل ① سوف نستخدم VIM

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \{u_{nt} - a\,u_{nxx}\}\,ds \quad ④$$

سنبدأ بالتقريب الابتدائي المعطى بالمعادلة

$$u_0(x,t) = \sin(2\pi x) \quad ⑤$$

وباستخدام ④ و ⑤ نحصل على النتيجة التالية

$$u_1(x,t) = \sin(2\pi x)[1-4\pi^2 a t]$$

$$U_2(x,t) = \sin(2\pi x)\left[1 - (4\pi^2 a\,t) + \frac{1}{2}(4\pi^2 a.t)^2\right]$$

$$U(x,t) = \sin(2\pi.x)\left[1 - (4\pi^2 a\,t) + \frac{1}{2}(4\pi^2 a.t)^2 - \frac{1}{6}(4\pi^2 a.t)^3 + \cdots\cdots\right]$$

من الواضح أنه عند $n \to \infty$ عندئذ $U_n(x,t)$ تتقارب إلى الحل النهائي (الحقيقي) :

$$U(x,t) = \sin(2\pi.x).\exp(-4\pi^2 a.t)$$

_ انتهت المحاضرة _

لاتنس طلب ملحق المحاضرة ؟ والذي يحتوي على تمارين

- انتهى المقرر -

* مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق بإذنه تعالى * ......