المادة: الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

القسم: رياضيات/تطبيقية/

السنة: الرابعة

مركز كلية العلوم

للتصوير والخدمات الطلابية

0992818604

النظري

رقم المحاضرة: ٦

عدد الصفحات: ١٠

التاريخ: ١٢/٤/٢٠١٩م

توضيح طريقة "lax-wendroff" :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

بتقليب وبالتالي:

$$u_{xt} = u_{tx}$$

نشتق بالنسبة لـ t :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + a\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow u_{tt} = -a\,u_{tx} \quad (1)$$

ص١

نشتق مرة ثانية بالنسبة لـ x فنجد :

$$u_{xt} + a\, u_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{tx} = -a\, u_{xx}} \quad (2)$$

من (1) , (2) نجد :

$$\boxed{u_{tt} = a^2\, u_{xx}}$$

نعلم من نشر تايلور أن :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$

$$u(t+\Delta t, x) = u(t,x) + u_t(\Delta t) + u_{tt}\left(\tfrac{1}{2}(\Delta t)^2\right)$$

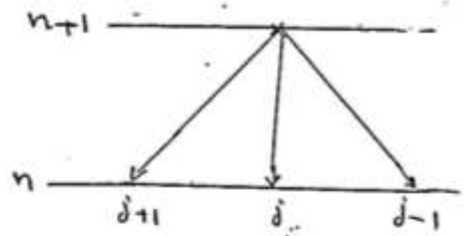
$$= u(t,x) - a u_x(\Delta t) + a^2 u_{xx}\left(\tfrac{1}{2}(\Delta t)^2\right)$$

$$\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t,x)}{\Delta t} + a u_x - a^2 u_{xx}\left(\tfrac{1}{2}(\Delta t)\right) = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{\Delta t} + a \underbrace{u_x}_{\text{مركزية}} - a^2 \underbrace{u_{xx}}_{\text{مركزية}}\left(\tfrac{1}{2}(\Delta t)\right) = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{\Delta t} + a u_x - a^2 u_{xx}\left(\tfrac{1}{2}(\Delta t)\right) = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n}}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2(\Delta x)} - \frac{a^2}{2}\Delta t\left(\frac{u_{j+1}^{n}-2u_j^{n}+u_{j-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right) = 0$$



$$E = O\left((\Delta x)^2, (\Delta t)^2\right)$$

- تعتبر هذه الطريقة طريقة ظاهرية لأن فيه
الطرف الأول $n+1$ والثاني n

شرط]

إذا تحققت العلاقة $\frac{E_3}{E_2} < 1$
ولم توجد علاقة بين Δt و Δx
تكون الطريقة ضمنية
إذا وجدنا علاقة تكون
ظاهرية [

(Δt) مع (Δx) $\Longleftarrow$
يعني أنه توجد
علاقة بين Δt و Δx

$$\left.\begin{array}{l} E_3 < E_2 \\ \frac{E_1}{E_2} < 1 \end{array}\right\}$$

[انتهى الشرح

حل وظيفة : التاسعة

$$u_t + a\,u_x = 0 \quad , \quad a > 0$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[u_j^{n+1} - u_j^n\right] + \frac{a}{\Delta x}\left[u_j^n - u_{j-1}^n\right] = 0$$

نأخذ :

$$N_j^n = \Sigma_j^n + D_j^n$$

ثم نعوض بالمعادلة :

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\Sigma_j^{n+1} + D_j^{n+1} - \Sigma_j^n - D_j^n\right] + \frac{a}{\Delta x}\left[\Sigma_j^n + D_j^n - \Sigma_{j-1}^n - D_{j-1}^n\right] = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\Sigma_j^{n+1} - \Sigma_j^n\right] + \frac{a}{\Delta x}\left[\Sigma_j^n - \Sigma_{j-1}^n\right] = 0$$

$$\Sigma_j^n = E^n e^{ikj\Delta x}$$

نعوض :

$$\frac{1}{\Delta t}\left[E^{n+1} e^{ikj\Delta x} - E^n e^{ikj\Delta x}\right] + \frac{a}{\Delta x}\left[E^n e^{ikj\Delta x} - E^n e^{ik(j-1)\Delta x}\right] = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[E^{n+1} - E^n\right] + \frac{a}{\Delta x}\left[E^n - E^n e^{-ik\Delta x}\right] = 0$$

$$E^{n+1} - E^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right]E^n = 0$$

$$E^{n+1} = E^n - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right] E^n$$

$$\frac{E^{n+1}}{E^n} = \boxed{1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right]} \quad G$$

$$|G| \leq 1 \quad \Leftarrow \quad CN = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

$$G = 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left[1 - e^{-ik\Delta x}\right]$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$1 - e^{-i\theta} = 1 - (\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= (1 - \cos\theta) + i(\sin\theta)$$

$$|1 - e^{-i\theta}|^2 = (1 - \cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$$

$$= 1 - 2\cos\theta + 1$$

$$= -2\cos\theta + 2$$
$$= 2(1 - \cos\theta)$$

$$= 4\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\Longrightarrow |1-e^{-i\theta}| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\underbrace{|1-e^{-i\theta}|}_{\beta} = \underbrace{\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|}_{\leq 1}$$

$$0 \leq \beta \leq 2$$

$$0 \geq -a\frac{\Delta t}{\Delta x}\beta \geq -2$$

$$1 \geq 1-a\frac{\Delta t}{\Delta x}\beta \geq -1$$

ومنه

$$|G| \leq 1$$

الاستقرار من أجل معادلة الحرارة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تقدمية للزمن — مركزية

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = c\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n = c\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right]$$

نضع :

$$c\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = r$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\left[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right]$$

$$u_j^{n+1} = r\,u_{j+1}^n + (1-2r)\,u_j^n + r\,u_{j-1}^n$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$
$$j = 0, 1, 2, \dots\ I$$

تقسيمات منتهية

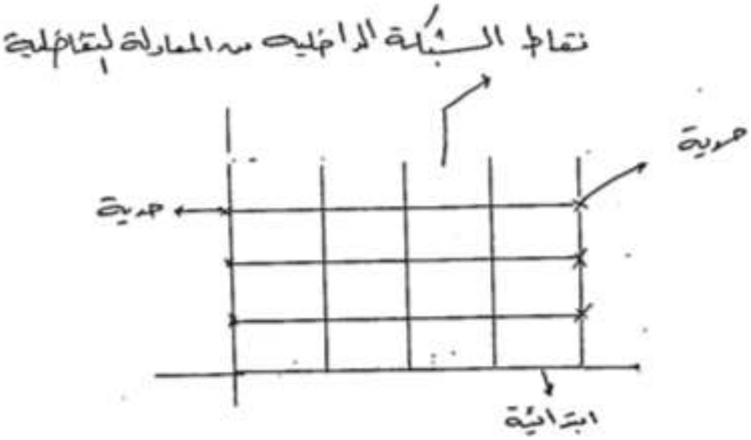
نلاحظ انها تمثل جملة معادلات خطية يمكن حلها بالطريقة المصفوفية

$$u^{(n+1)} = A\,u^{(n)} + B^{(n)}$$

$$u_1^{n+1} = r\,u_2^n + (1-2r)\,u_1^n + r\,u_0^n \longrightarrow \text{شرط حدي}$$

$$u_2^{n+1} = r\,u_3^n + (1-2r)\,u_2^n + r\,u_1^n$$

$$u_3^{n+1} = r\,u_4^n + (1-2r)\,u_3^n + r\,u_2^n$$



$$A = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \\ r & 1-2r & r & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

بالشرط الحدي

$$B = \begin{bmatrix} r\square \\ r\square \\ \vdots \\ r\square \end{bmatrix}$$

يمكن دراسة الاستقرار من خلال دراسة استقرار
الجملة المصفوفية
نعلم أنّ الجملة المصفوفية متقاربة إذا كان أعظم

قيمة ذاتية أصغر من الواحد لكن إيجاد القيم الذاتية ليست بالمسألة السهلة أو البسيطة لذلك أوجد العلماء طرائق تكرارية لايجاد القيم الذاتية (ليست مجال دراستنا)

_ نعود الآن إلى دراسة الاستقرار بالطريقة التقليدية :

$$u_j^{n+1} = r\,u_{j+1}^n + (1-2r)\,u_j^n + r\,u_{j-1}^n$$

نفرض أن :

$$u(t_n, x) = 1.e^{ikx}$$

$\boxed{\text{مرحلة أولى}}$

$$u_j^n = e^{ikx_j}$$

بالتعويض نجد :

$$u_j^{n+1} = r e^{ikx_{j+1}} + (1-2r)\,e^{ikx_j} + r e^{ikx_{j-1}}$$

$$= r e^{ik(x_j+\Delta x)} + (1-2r)e^{ikx_j} + r e^{ik(x_j-\Delta x)}$$

المرحلة الثانية : نفرض :

$\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}$

$$u_j^{n+1} = G\,e^{ikx_j}$$

عندئذ نجد :

$$G = re^{ik\Delta x} + (1-2r) + re^{-ik\Delta x}$$

نعلم أنّ :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ومنه:

$$G = \left[1 - 4r\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k\Delta x\right)\right]$$

لدينا :

$$\left|\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k\Delta x\right)\right| \leq 1$$

وكي نحصل ع تقارب يجب أن يكون:

$$|G| \leq 1$$

$$\left|1 - 4r\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k\Delta x\right)\right| \leq 1$$

$$-1 \leq 1 - 4r\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k\Delta x\right) \leq 1$$

$$0 \leq r\sin^2 \leq \tfrac{1}{2}$$

لكن :

$$|\sin^2| \leq 1$$

بالتالي :

$$\boxed{0 \leq r \leq \tfrac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2c}}$$

و هو شرط التقارب وهو الذي يحدد تقسيمات Δt و Δx

~ انتهت المحاضرة ~ ص ١٠