المادة: الحلول العددية للمعادلات التفاضلية

القسم: رياضيات تطبيقية

السنة: الرابعة

مركز كلية العلوم

للتصوير والخدمات الطلابية

0992818604

النظري

رقم المحاضرة: ١٢

عدد الصفحات: ١٦

التاريخ: / /٢٠

FACULTY OF SCIENCE CENTER FOR STUDENT SERVICES

0992818604

المعادلات التفاضلية العادية :

The Rayleigh-Ritz method

إنّ معظم النماذج الرياضية المستخدمة في العلوم الطبيعية والهندسة تعتمد على المعادلات التفاضلية (العادية و الجزئية) والمعادلات التكاملية ولكن صعوبة إيجاد الحلول الدقيقة لمثل هذه المعادلات تجعلنا بحاجة لطرق تقريبية.

سندرس مسألة القيم الحدية - عند نقطتين - التالية : (لأ معادلة من الرتبة الثانية)

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x) \qquad 0\le x\le 1$$

وحيث :

$$\forall x \in [0,1] \quad q(x) \geq 0 \quad p(x) > 0$$

$$f, q \in C[0,1] \qquad p \in C^1[0,1]$$

في الواقع نحن لا نبحث عن حل للمسألة المعطاة وإنما للصيغة الضعيفة لهذه المسألة .

الصيغة الضعيفة : .

لو وضعنا

$$L(y) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)\,y$$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بتابع $v(x)$ ثم المكاملة على المجال $[0,1]$ نحصل على

$$(2) \qquad I(y) = \int_0^1 v(x)\,(L(y) - f(x))\,dx = 0$$

وحيث :

$v \in L^1[0,1]$ ويحقق الشروط الحدية للمسألة

تكامله

أي :

نسمي (2) بالصيغة الضعيفة (weak form)

للمعادلة (1)

وندعو $v(x)$ تابع الوزن (weight function)

ويبرهن أنّ كل حل للصيغة الضعيفة هو حل للمسألة الحدية المرفقة .

ملاحظة :

سميت الصيغة الضعيفة هكذا لأنها تخفض مرتبة الاشتقاق الذي نتعامل معه .

$$\int_0^1 v(x)\,\big(L(y) - f(x)\big)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 v(x)\left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)\,y\right)dx - \int_0^1 v(x)\,(f(x))\,dx = 0$$

$$-\int_0^1 v(x)\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right)dx + \int_0^1 v(x)\,q(x)\,y\,dx - \int_0^1 v(x)\,(f(x))\,dx = 0$$

ومن علاقة المكاملة بالتجزئة :

$$\int_0^1 f\cdot\frac{dg}{dx}\,dx = \big[f\cdot g\big]_0^1 - \int_0^1 g\cdot\frac{df}{dx}\,dx$$

$$-\int_0^1 v(x)\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right)dx = -\left[v(x)\cdot\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\,dx$$

$= 0$ حسب [illegible] الشروط الحدية

لأن الـ [illegible]

المجزأة [illegible]

$v \in L^1$ ، $p(x) > 0$

ص3

وكون $v(x)$ يحقق الشروط الحدية نجد :

$$-\int_0^1 v(x)\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\right)dx=\int_0^1\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\,dx$$

ومنه تصبح الصيغة الضعيفة للمسألة :

$$\int_0^1 (p.y'.v')\,dx+\int_0^1 (v.q.y)\,dx-\int_0^1 (v.f)\,dx=0$$

والتي تحوي المشتقة من المرتبة الأولى فقط للتابع y
ولإيجاد حل تقريبي للصيغة الضعيفة نعرض المبرهنة التالية .

مبرهنة : غير مطلوبة

التكامل $\int_0^1 f(x, y, y')\,dx$ الذي يحقق الشروط الحدية

$$y(0)=y(1)=0$$

يبلغ قيمته القصوى على المنحني y إذا كان :

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$ على المنحني y

والتي تسمى معادلة أولر - لاغرانج .

- انطلاقاً من هذه البرهنة نجد أنه يمكن إيجاد حل معادلة أولر - لاغرانج لإيجاد حل المسألة الحدية المطلوب إلا أنه إيجاد الحل عن طريق هذه المعادلة تبقى طريقة غير مجدية وذلك لسببين :

① أن معادلة أولر - لاغرانج غير قابلة للحل دوماً (ولا يمكن التعبير عن الحل بشكل صريح

مثال :

$$I(y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (y')^2 + e^y \right) dx$$

$$y(0) = 0 \qquad y(1) = 0$$

لإيجاد y الذي يجعل I أصغرياً باستخدام معادلة أولر - لاغرانج ينبغي علينا إذاً حل المعادلة التالية :

$$y'' = e^y \quad x \in]0,1[\quad y(0) = 0 \quad y(1) = 1$$

ولسوء الحظ هذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لا يمكننا حلها بدقة .

٢ إنّ استخدام أولر - لاغرانج لحل حتى بعض المسائل البسيطة غالباً ما يكون صعباً ومعقداً ؟ وذلك لأنّ طبيعة أولر - لاغرانج تتطلب حل معادلات تفاضلية جزئية .

٣ انّ طبيعة بعض المسائل قد تتطلب وضع شرط إضافي على الحل y مثل .

$$\int_0^1 G(x, y, y')\, dx = \text{constant}$$

وهذا يعني أنّ أولر - لاغرانج يصبح شرطاً مزدوجاً :

$$\frac{\partial}{\partial y}(f + G) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda G)\right) = 0$$

* في كثير من المسائل الفيزيائية نحن غالباً لا نحتاج إلى الحل الدقيق وفي هذه الحالات لا توجد فائدة كبيرة من حل معادلات أولر - لاغرانج لإيجاد الحل الدقيق (هذا إن كان ذلك ممكناً) طالما بإمكاننا الحصول على تقريب جيد بسهولة .

وبوجود كل هذه الصعوبات وطالما أننا غير مهتمين بالبحث عن الحل الدقيق إذاً يجب إيجاد طريقة مناسبة لإيجاد حل تقريبي .

ولحسن الحظ هناك واحدة منها :

The Rayleigh-ritz method طريقة رايلي-ريتز

والتي طورها (وبشكل مستقل) كل من Walter Ritz و Lord Rayliegh وهي تقنية تقريبية لحل مسائل القيم الحدية وسنعرضها في بعد واحد. وهي تعتمد على المبرهنة التي نعرضها بعد التعريف التالي:

تعريف:

نقول $y \in C^1[0,1]$ إذا كان هو ومشتقه من المرتبة الأولى مستمران

ونقول $y \in C^2[0,1]$ إذا كان هو ومشتقه حتى المرتبة الثانية مستمران

ونقول $y \in C_0^2[0,1]$ إذا كان $y \in C^2[0,1]$ وكان :

$$y(0) = y(1) = 0$$

مبرهنة :

ليكن $p \in C^1[0,1]$ و $p(x) \geq \delta > 0$

$q(x) \geq 0$ من أجل $0 \leq x \leq 1$.

إن التابع $y \in C_0^2[0,1]$ هو الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x) \qquad 0\leq x\leq 1$$

إذا وفقط إذا كان التابع الوحيد من $C_0^2[0,1]$ الذي يجعل التكامل التالي أصغرياً

$$I(u)=\int_0^1\left\{p(x)[u'(x)]^2+q(x)[u(x)]^2-2f(x)u(x)\right\}dx$$

تعتمد طريقة رايلي ريتز مع تقريب الحل y بأخذ $\min I[u]$ ليس من أجل كل $u\in C_0^2[0,1]$ بل من أجل مجموعة صغيرة من الدوال مكونة من التراكيب الخطية لدوال قاعدة محددة $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

$y=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\dots$

ففي طريقة رايلي ريتز نبحث عادة عن حل من الشكل :

$$y^*=\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$$

حيث c_i وسطاء يجب تعيينها و φ_i هي مجموعة دوال القاعدة وتسمى توابع الاختبار ويشترط

على توابع الاختبار أن تحقق الشروط :

- مستمرة ع الساحة المدروسة ،
- تحقق الشروط الحدية للمسألة .
- بشكل عام نختار توابع الاختبار بحيث تحقق فيزياء المسألة .

فإذا عوضنا هذا الحل التقريبي y في المعادلة التفاضلية وكونه لا يحقق المعادلة سنجد :

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy^*}{dx}\right)+q(x)\,y^*-f(x)=R(x)\neq 0$$

نسمي $R(x)$ الباقي (residual)؛

نلاحظ أنه تابع للوسطاء c_i

وفي طريقتنا نحصل على هذه الوسطاء من المعادلة :

نختار الوسطاء بحيث تحقق ، التكامل السابق ، حيث $R(x) \to 0$

$$I(y^*) = \int_0^1 w(x)\,R(x)\,dx = 0$$

التي تمثل الصيغة الضعيفة للمسألة ، ونريد تعيين الثوابت c_i بحيث يكون $R(x)$ أصغر ما يمكن ويتحقق ذلك عندما يكون :

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=0 \qquad 1\le i\le n \quad *$$

حيث :
* هي جملة n معادلة جبرية خطية بحلها نستطيع تعيين الثوابت c_i

الآن بتعويض y^* في الصيغة الضعيفة وحسب المبرهنة السابقة نجد :

$$I[y^*] = I\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i\right]$$

$$= \int_0^1 \left\{ p(x)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i'(x)\right]^2 + q(x)\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)\right]^2 - 2 f(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \right\} dx \quad \ldots (3)$$

ولإيجاد $\min I[y^*]$ من الضروري نعتبر أن I دالة بـ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ويجب أن يتحقق :

$$(4) \qquad \frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

بمفاضلة المعادلة (3) نجد :

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{ 2p(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + 2q(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \varphi_j(x) - 2 f(x) \varphi_j(x) \right\} dx$$

من (4) نجد :

حفظ

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \{ p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) \} dx \right] c_i$$

$$- \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)\,dx \;;\; (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5)$$

المعادلات (5) تكتب كجملة خطية بالشكل المصفوفي
$Ac = b$ متغيراتها $c_1, c_2, \ldots, c_n$

حيث :

A مصفوفة متناظرة تعطى عناصرها بالشكل :

حفظ

$$a_{ij} = \int_0^1 [\, p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)] dx$$

و b معرفة بالشكل :

حفظ

$$b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

حيث :

$$i, j = 1, \ldots n$$

مثال :

أوجد حل مسألة الشروط الحدية التالية :

$$y''(x) = -x$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

الحل :

باختيار توابع الاختبار :

$$\varphi_i(x) = x^i(1-x) \quad 1 \le i \le n$$

من الواضح أنها توابع مستمرة وتحقق الشروط الحدية للمسألة ومستقلة خطياً

وبأخذ $\boxed{n=2}$ مثلاً

ولنوجد الحل :

$$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$$

ومن أجل ذلك نريد تعيين الثوابت c_1, c_2

لدينا :

$$p(x) = -1 \quad , q(x) = 0$$
$$f(x) = -x$$

$$A.C = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_i(x) = x^i(1-x)$$

$$\varphi_1 = x(1-x) \Rightarrow \varphi_1' = 1-2x$$

$$\varphi_2 = x^2(1-x) \Rightarrow \varphi_2' = 2x-3x^2$$

$$a_{11} = \int_0^1 [p(x)\,\varphi_1'(x)\,\varphi_1'(x) + q(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_1(x)]\,dx$$

$$= \int_0^1 [-(1-2x)^2 + 0]\,dx$$

$$= \int_0^1 -(1-4x+4x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 -1\,dx + \int_0^1 4x\,dx - \int_0^1 4x^2\,dx$$

$$= [-x]_0^1 + [2x^2]_0^1 - \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$a_{12} = \int_0^1 [p(x)\,\varphi_1'(x)\,\varphi_2'(x) + q(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)]\,dx.$$

$$= \int_0^1 [\varphi_1'(x)\,\varphi_2'(x) + 0]\,dx$$

$$= \int_0^1 -(1-2x)x(2-3x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (-6x^3 - 2x + 7x^2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{6}{4}x^4 - x^2 + \frac{7}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{-1}{6}$$

وبنفس الطريقة نحسب ما يلي :

$$a_{21} = a_{12} = -\frac{1}{6}$$ متناظرة

$$a_{22} = \int_0^1 [p(x)\,\varphi_2'(x)\,\varphi_2'(x) + q(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_2(x)]\,dx$$

$$= \int_0^1 [-\varphi_2'(x)\,\varphi_2'(x) + 0]\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^2(2-3x)^2\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^2(4-12x+9x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (-4x^2+12x^3-9x^4)\,dx$$

$$= \left[-\frac{4}{3}x^3 + 3x^4 - \frac{9}{5}x^5\right]_0^1 = -\frac{2}{15}$$

ولنحسب عناصر المصفوفة b :

$$b_1 = \int_0^1 f(x)\,\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 -x^2(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^2\,dx + \int_0^1 x^3\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{12}$$

$$b_2 = \int_0^1 f(x)\,\varphi_2(x)\,dx = \int_0^1 -x^3(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^3\,dx + \int_0^1 x^4\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{1}{20}$$

ومنه تصبح الجملة المصفوفية : $A\,c = b$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -1/6 \\ -1/6 & -2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/12 \\ -1/20 \end{pmatrix}$$

ومنه نحصل على جملة المعادلتين :

$$4c_1 + 2c_2 = 1$$

$$10c_1 + 8c_2 = 3$$

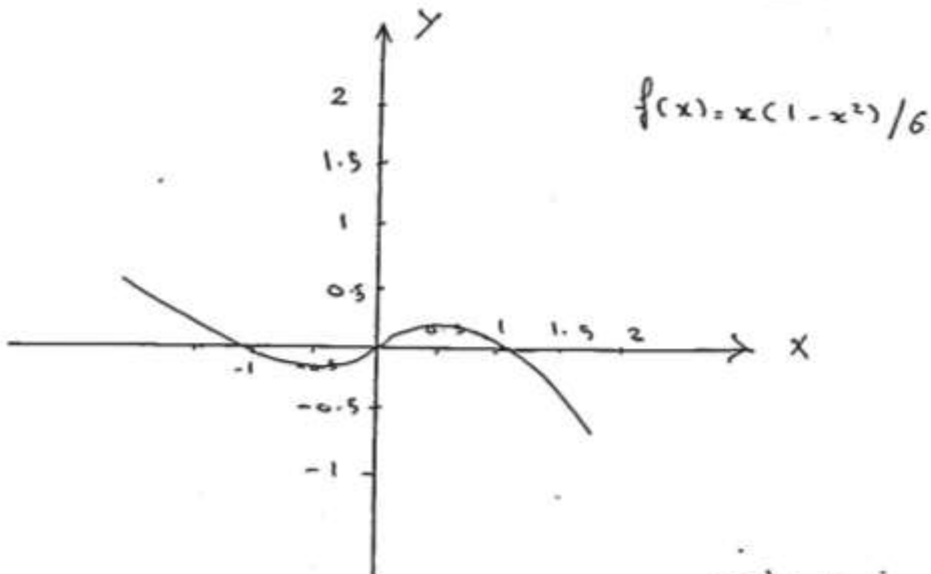
والتي لها الحل $c_1 = c_2 = 1/6$ ومنه فإن الحل وفق رايلي ريتز للمسألة الحدية المعطاة يكون:

$$y = 1/6\,\varphi_1 + 1/6\,\varphi_2$$

$$= 1/6\,x(1-x) + 1/6\,x^2(1-x)$$

$$y = \frac{x(1-x^2)}{6}$$

ونلاحظ أنّ هذا الحل هو الحل الدقيق للمسألة المعطاة



ملاحظة:

التفسير الرياضي لهذه الطريقة (غير مطلوب)؛

سؤال:

كيف يكون معرفة كيفية اختيار توابع الاختبار؟

الجواب

لا توجد طريقة إلى الآن لتحديد .

ملاحظة:

في الامتحانات يجب احضار آلة حاسبة علمية تستطيع أداء ميزة حساب التكامل لكسب الوقت في الامتحان

- انتهت المحاضرة -

ص١١ - ص١٥ - ص١٣ غير مطلوبة من الملاحظة

طريقة غالركين

ندرس مسألة القيم الحدية التالية :

$$① \quad -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u'+r(x)u=f(x) \quad ; 0\le x\le 1$$

$$u(0)=u(1)$$

وحيث

$$\forall x\in[0,1] \quad q(x)\ge 0 \quad \exists\, \delta>0 : p(x)\ge\delta>0$$

$$p,q,r,f\in C[0,1]$$

- نلخص طريقة غالركين في الخطوات التالية :

[٢] إيجاد الصيغة الضمنية للمسألة :

نضرب طرفي المعادلة ① بتابع $v \in C^1[0,1]$ (تابع وزن)

وبالمكاملة على المجال $[0,1]$ نحصل على

$$\int_0^1 p u' v' \, dx + \int_0^1 q u' v \, dx + \int_0^1 r u v \, dx = \int_0^1 f v \, dx + [p u' v]_0^1$$

وذلك بالمكاملة بالتجزئة

وإذا فرضنا $v(0) = v(1) = 0$ نجد :

$$\int_0^1 p u' v' \, dx + \int_0^1 q u' v \, dx + \int_0^1 r u v \, dx = \int_0^1 f v \, dx$$

سنرمز بـ V لفضاء توابع الاختبار أي فضاء كل التوابع المستمرة والمحققة للشروط الحدية والتي مشتقاتها الأولى مستمرة قطعياً .

إن V هو فضاء متجهي يرمز له بـ $H_0^1(0,1)$

$$H_0^1(0,1) = \{ v \in L^2(0,1) : v' \in L^2(0,1) , v(0) = v(1) = 0 \}$$

قابل للتكامل

وكل حل لـ (1) هو أيضاً حل للمسألة التالية

والتكامل بحسب التكامل بالتجزئة

(4) $$\text{find } u\in V : a\langle u,v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v\in V$$

حيث :

$$a\langle u,v\rangle = \int_0^1 p u' v' dx + \int_0^1 q u' v dx + \int_0^1 r u v dx \quad (5)$$

$$\langle f, v\rangle = \int_0^1 f v dx$$

إن $a\langle .\,,.\rangle$ هو شكل خطاني خطي بالنسبة لكل من متغيريه

(4) هي الصيغة الضعيفة للمسألة ونلاحظ أنها لا تحوي إلا المشتق الأول للتابع المجهول

② اختيار توابع القاعدة :

نأخذ V_h فضاء متجهي جزئي من V منته البعد ونحول مسألة غالركين إلى :

[illegible]

(6) $$\text{find } u_h \in V_h : a\langle u_h, v_h\rangle = \langle f, v_h\rangle \quad \forall v_h\in V_h$$

وهي مسألة منتهية البعد . ونرمز بـ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_n$ لمجموعة التوابع المستقلة خطياً من V_h (قاعدة V_h)

٣ تقريب الحل:

نبحث عن حل من الشكل $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x)$

حيث:

n بعد الفضاء المقرب الجزئي V_h.

٤ اختيار تابع الوزن:

بما أن الصيغة الضعيفة محققة لأجل أي $v \in V_h$ إذاً أ

يمكن أن نختار n تابع وزن $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$ بحيث

يتحقق

$$a\langle u, v_i\rangle = \langle f, v_i\rangle \qquad i = 1, \ldots\ldots n$$

$$a\langle u, v_i\rangle = \int_0^1 p u' v_i' \, dx + \int_0^1 q u' v_i \, dx + \int_0^1 r u v_i \, dx$$

$$\langle f, v_i\rangle = \int_0^1 f v_i$$

- طريقة غالركين: تعتمد على اختيار توابع الوزن مساوية لتوابع الاختيار أي:

$$v_i = \varphi_i$$

ومنه:

$$a\langle u, \varphi_i\rangle = \langle f, \varphi_i\rangle \quad i = 1, \ldots\ldots n$$

وبالتالي :

بالتعويض نجد : $u(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x)$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \, a\langle \varphi_j , \varphi_i \rangle = \langle f , \varphi_i \rangle \qquad i = 1, \ldots, n$$

وهكذا أصبحت المسألة تعيين الثوابت $u_1, u_2, \ldots, u_n$

من جملة المعادلات الخطية السابقة .

5 إيجاد الشكل المصفوفي :

من المعادلات الأخيرة :

جملة معادلات خطية.

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \, a\langle \varphi_j , \varphi_i \rangle = \langle f , \varphi_i \rangle \qquad i = 1, \ldots, n$$

لو وضعنا :

$$a_{ij} = a\langle \varphi_j , \varphi_i \rangle$$

$$= \int_0^1 p \, \varphi_j' \varphi_i' \, dx + \int_0^1 q \, \varphi_j' \varphi_i \, dx + \int_0^1 r \, \varphi_j \varphi_i \, dx$$

و $b_i = \langle f , \varphi_i \rangle = \int_0^1 f \, \varphi_i \, dx$

عندئذ :

يمكن كتابة جملة المعادلات الجبرية بالشكل

المصفوفي التالي :

$$AU = B$$

حيث: $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ، $B = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

نسمي A مصفوفة الصلابة ونسمي B متجه الحمولة.

⑥ حل الجملة المصفوفية :

نحل الجملة المصفوفية لتعيين الثوابت المجهولة $u_1, u_2, \ldots, u_n$ والحصول على الحل المطلوب

نتيجة :

إذا أردنا الحل باستخدام طريقة غالركين يمكن أن نقوم باختيار مناسب لتوابع القاعدة (الاختبار) ثم حل الشكل المصفوفي للمسألة.

ملاحظة :

إن بنية مصفوفة الصلابة A وكذلك دقة التقريب $u(x) = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j(x)$ تعتمد اختيار التوابع $\varphi_j(x)$

مثال :

أوجد حل المسألة الحدية التالية باستخدام طريقة غالركين

$$-\frac{d}{dx}(x y') + 4y = 4x^2 - 8x + 1$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

ثم قارن مع الحل المضبوط $y(x) = x^2 - x$

الحل :

[حل التمرين في النوطة يوجد فيه خطأ وحاولت أن أصححه]

- باختيار $\varphi_j(x) = x(x-1)^j$ كتوابع اختبار وأخذ $n = 2$ يكون الحل المطلوب

$$y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$$

ثم [إن توابع الاختبار نختارها بحيث تحقق الشروط الحدية)
- فلو كانت [illegible] كالتالي . $y(0) = y(2) = 0$
لكانت توابع الاختبار $\varphi_j = x(x-2)^j$
... وهكذا] انتهى الشرح

ولتعيين الثوابت لدينا :

$p(x) = x \qquad q(x) = 0 \qquad r(x) = 4 \qquad f(x) = 4x^2 - 8x + 1$

$$\varphi_1' = 2x - 1 \Leftarrow \qquad \varphi_1 = x(x-1)$$

$$\varphi_2 = x(x^2 - 2x + 1) \Leftarrow \qquad \varphi_2 = x(x-1)^2$$
$$= x^3 - 2x^2 + x$$
$$\varphi_2' = 3x^2 - 4x + 1 \Leftarrow$$

$$b_i = \int_0^1 f(x)\, \varphi_i(x)\, dx \qquad i = 1, 2$$

$$= \int_0^1 x(4x^2 - 8x + 1)(x-1)^i\, dx$$

$$b_1 = \int_0^1 x(4x^2 - 8x + 1)(x-1)\, dx$$
$$= (x^2 - x)(4x^2 - 8x + 1)\, dx$$
$$= \int_0^1 4x^4 - 8x^3 + x^2 - 4x^3 + 8x^2 - x\, dx$$
$$= \int_0^1 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 - x\, dx$$
$$= \left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{12}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$
$$= \frac{4}{5} - 3 + 3 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$$

$$b_2 = \int_0^1 x(x-1)^2(4x^2 - 8x + 1)\, dx$$
$$= \int_0^1 x(x^2 - 2x + 1)(4x^2 - 8x + 1)\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)(4x^2 - 3x + 1)$$

$$= -\frac{7}{60} \boxed{} \longrightarrow$$ أوجده بالآلة الحاسبة مؤخراً

$$a_{ij} = \int_0^1 p\, \varphi_j' \varphi_i'\, dx + \int_0^1 q\, \varphi_j' \varphi_i\, dx + \int_0^1 r\, \varphi_j \varphi_i\, dx$$

$$a_{11} = \int_0^1 [-p'(x)\varphi_1(x)\varphi_1'(x) - p(x)\varphi_1(x)\varphi_1''(x) + r(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)]\, dx$$

$$= \int_0^1 x(2x-1)^2\, dx + \int_0^1 4x^2(x-1)^2\, dx$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$= \boxed{} \longrightarrow$$ أوجده بالآلة الحاسبة

$$a_{12} = \int_0^1 [-p'(x)\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - p(x)\varphi_1(x)\varphi_2''(x) + r(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)]\, dx$$

$$= \int_0^1 x(3x^2 - 4x + 1)(2x-1)\, dx + \int_0^1 4x(x-1)^2(x(x-1))\, dx$$

$$= \boxed{} \longrightarrow$$ أوجده بالآلة الحاسبة مؤخراً

$$a_{21} = \int_0^1 x(2x-1)(3x^2 - 4x + 1)\, dx + \int_0^1 4x(x-1)(x(x-1)^2)\, dx$$

$$= \boxed{}$$

$$a_{22} = \int_0^1 \left[-p'(x)\,\phi_2(x)\,\phi_2'(x) - p(x)\,\phi_2(x)\,\phi_2''(x) + r(x)\,\phi_2(x)\,\phi_2(x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 x\,(3x^2 - 4x + 1)^2\, dx + \int_0^1 4\, x^2 (x-1)^4\, dx$$

$$= \boxed{\quad}$$

ومنه نضع المعادلة بالمصفوفية :

$$A \cdot C = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ثم نعوض بالنواتج السابقة ونوجد c_1 و c_2

— انتهت المحاضرة —