◄ السؤال الأول ►

لدينا . $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$ و $Q(x)=\big((x-3)x+3\big)x-1$

1) $Q(x)=(x^2-3x+3)x-1=x^3-3x^2+3x-1=P(x)$

2) $P(2.19)=1.67$ و $Q(2.19)=1.69$

3) القيمة الفعلية $T=1.685159$ ولتكن Q القيمة المحسوبة يدوياً و E الخطأ المطلق المرتكب

فيكون : $E_P=|T-Q_P|=|1.685159-1.67|=0.015159$ و

$$E_Q=|T-Q_Q|=|1.685159-1.69|=0.004841$$

وليكن R الخطأ النسبي فيكون : $R_P=\dfrac{E_P}{T}=\dfrac{0.015159}{1.685159}=0.008995\%$ و

$$R_Q=\frac{E_Q}{T}=\frac{0.004841}{1.685159}=0.002872\%$$

نلاحظ أن الخطأ المرتكب سواءُ المطلق أو النسبي في حال استخدام التابع $Q(x)$ أقل بالمقارنة مع نفس الخطأ عند استخدام التابع $P(x)$ والسبب يعود لأن التابع $P(x)$ يحوي 6 عمليات جداء مقابل عمليتي جداء فقط في التابع $Q(x)$ وهذا أدى لعمليات تدوير أكثر وخسارة أكبر في الدقة عند احتساب النتيجة باستخدام التابع $P(x)$

◄السؤال الثاني►

لدينا $f(x)=2\cos(x)-e^{-x}$ و $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1) ان $f(0)=1$ و $f(\frac{\pi}{2})=-e^{-\frac{\pi}{2}}\approx-0.2079$ وبالتالي $f(0)*f(\frac{\pi}{2})<0$ أي يوجد جذر للتابع ينتمي لهذا المجال.

2) لدينا $x_0(0,1)$ و $x_1(1.5708,-0.2079)$ و $x_{n+1}=x_n-f(x_n)*\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

فيكون : $x_2=x_1-f(x_1)*\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}=1.5708+0.2079*\frac{1.5708-0}{-0.2079-1}$

$$=1.5708-0.2079*1.3004=1.5708-0.2703\approx1.3005$$

أي $x_2(1.3005,0.2616)$ و أيضاً :

$$x_3=x_2-f(x_2)*\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}=1.3005-0.2616*\frac{1.3005-1.5708}{0.2616+0.2079}$$

$$=1.3005+0.2616*0.5757=1.3005+0.1506=1.4511$$

وبالتالي القيمة التقريبية للجذر بتطبيق طريقة القاطع مرتين هي 1.4511

قانون سرعة التقارب الذي يربط الخطأ المرتكب في أحد مراحل الحل مع الخطأ في المرحلة التي تسبقها هو : $|\alpha-x_{n+1}|\le\tau|\alpha-x_n|^P$ حيث P هو مرتبة التقارب و τ هو معدل التقارب و α هي قيمة الجذر أو أخر قيمة وصلنا اليها للمتتالية المتقاربة من الحل

في طريقة القاطع مرتبة التقارب $P=1.62$ ولدينا $\alpha=x_3$ فنكتب :

$$|x_3-x_2|\le\tau|x_3-x_1|^P\Rightarrow|1.4511-1.3005|\le\tau|1.4511-1.5708|^{1.62}$$
$$\Rightarrow0.1506\le\tau(0.1197)^{1.62}\Rightarrow0.1506\le0.0321\tau\Rightarrow\tau\ge4.6916$$

فمعدل التقارب الأصغري $\tau=4.6916$

◄ السؤال الثالث ►

لدينا $f(x)=x^2-2$ معرف على R و $g(x)=\frac{2(x+1)}{x+2}$ معرف على المجال $[1,2]$

1) نحسب المشتق الأول للتابع $g(x)$:

$$g'(x)=\frac{2(x+2)-2(x+1)}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}>0\forall x\in[1,2]$$

أي أن التابع $g(x)$ متزايد تماماً على هذا المجال ، ننظم جدول التغيرات :

x	1		2
$g'(x)$		+ + + + + + + + +	
$g(x)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

و بحساب قيم التابع على أطراف المجال نستنتج أن $g([1,2])=[\frac{4}{3},\frac{3}{2}]\subset[1,2]$

2) ان التابع $g(x)$ قابل للاشتقاق على المجال $[1,2]$ وبتطبيق نظرية التزايدات المحدودة فانه يوجد عدد $c\in[1,2]$ يحقق :

$$\forall(x,y)\in[1,2]*[1,2]:g(x)-g(y)=g'(c)(x-y)$$

أي أن المماس للتابع في النقطة c يوازي المستقيم المار بالنقطتين x و y

ويمكن أن نكتب : $|g(x)-g(y)|=|g'(c)||(x-y)|$ ونلاحظ أن التابع $g'(x)$ متناقص تماماً على المجال $[1,2]$ وبالتالي يأخذ قيمته العظمى عندما $x=1$

أي أنه مهما تكن $c\in[1,2]$ فان $g'(c)\le g'(1)=\frac{2}{9}$ وبما أن $g'(x)$ موجب على هذا المجال

فيمكن أن نكتب $\frac{1}{2} < \frac{2}{9} \leq |g'(c)|$ وينتج من ذلك $|g'(c)||(x-y)| \leq \frac{1}{2}|(x-y)|$

وبالتالي $|g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}|(x-y)|$

3) أولاً نثبت صحة الاقتضاء $f(x)=0 \Rightarrow x=g(x)$ ، ان $f(x)=0$ يعني أن $x=\sqrt{2}$

وبالتعويض نجد : $g(\sqrt{2}) = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+2} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+2} = \sqrt{2}\frac{(2+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2} = \sqrt{2}$

فلاقتضاء محقق ، والأن نثبت صحة الاقتضاء $x=g(x) \Rightarrow f(x)=0$

$$x=g(x) \Rightarrow x = \frac{2(x+1)}{x+2} \Rightarrow x^2+2x = 2x+2 \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow f(x)=0$$

فالاقتضاء محقق وبالتالي $x=g(x) \Leftrightarrow f(x)=0$

4) لدينا $x_0=2$ و العلاقة التدريجية $x_{n+1}=g(x_n)$ وبالتالي $x_1=g(2)=1.5$ و

$x_2=g(1.5)=1.4286$ و $x_3=g(1.4286)=1.4167$ و

$x_4=g(1.4167)=1.4146$ و $x_5=g(1.4146)=1.4143$

وان تحقق الشرط $g([1,2]) \subset [1,2]$ والشرط $|g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}|(x-y)|$ يعني حسب

المبرهنة(3) في المقرر أنه يوجد جذر وحيد α للمعادلة $g(x)=x$ (نقطة ثابتة وحيدة ل g)

تنتمي الى المجال $[1,2]$ وأن المتتالية المعرفة بالعلاقة $x_{n+1}=g(x_n) : n \in N$ تتقارب من

النقطة α ، وبحل المعادلة $g(x)=x$ نجد أن $\alpha=\sqrt{2}$ أي أن $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$

5) لقد أثبتنا أنه $\forall (x,y) \in [1,2]*[1,2] : |g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}|(x-y)|$ وبما أن

$\forall n \in N : x_n \in [1,2]$ فيمكن أن نضع $x=x_n$ و $y=\sqrt{2}$ وبالتالي $f(x_n)=x_{n+1}$

و $f(y)=\sqrt{2}$ لأن $\sqrt{2}$ نقطة ثابتة للتابع g أي : $|x_{n+1}-\sqrt{2}|\leq\frac{1}{2}|x_n-\sqrt{2}|$

وبالتالي $|x_n-\sqrt{2}|\leq(\frac{1}{2})^n|x_0-\sqrt{2}|$ ولدينا $x_0=2$ ومتراجحة الخطأ $|x_n-\sqrt{2}|\leq 10^{-6}$

بالتعويض نجد :

$$(\frac{1}{2})^n|2-\sqrt{2}|\leq 10^{-6}\Rightarrow(\frac{1}{2})^n*0.585786\leq 10^{-6}\Rightarrow 2^n\geq 585786\Rightarrow n\geq 20$$

◄السؤال الرابع►

لدينا $A=\begin{pmatrix}1 & c\\ c & 1\end{pmatrix}$ ومنقولها $A^t=\begin{pmatrix}1 & c\\ c & 1\end{pmatrix}$ وبالتالي A متناظرة ،نحسب القيم الذاتية لها

$$|\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & c\\ c & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-c^2=(1-\lambda-c)(1-\lambda+c)=0$$

اما $1-\lambda-c=0\Rightarrow\lambda_1=1-c$ أو $1-\lambda+c=0\Rightarrow\lambda_2=1+c$ ولكون A متناظرة نكتب:

$cond_2(A)=\frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|}$ ونفرض أن الجملة تكون مريضة عندما $cond_2(A)\geq 10$

ونميز ثلاث حالات تبعاً لقيم c :

$c=0$ أي $\lambda_1=\lambda_2=1$ وبالتالي $cond_2(A)=1$ والجملة سليمة

$c>0$ وبالتالي $cond_2(A)=\frac{1+c}{|1-c|}$ ونكتب :

$$\frac{1+c}{|1-c|}\geq 10\Rightarrow 10|1-c|\leq 1+c\Rightarrow\left(10(1-c)\leq 1+c\right)\wedge\left(10(1-c)\geq -1-c\right)$$

$10(1-c)\leq 1+c\Rightarrow 11c\geq 9\Rightarrow c\geq\frac{9}{11}$ و $10(1-c)\geq -1-c\Rightarrow 9c\leq 11\Rightarrow c\leq\frac{11}{9}$

أي $c \in [\frac{9}{11}, \frac{11}{9}] / \{1\}$

$c < 0$ وبالتالي $cond_2(A) = \frac{1-c}{|1+c|}$ ونكتب :

$$\frac{1-c}{|1+c|} \geq 10 \Rightarrow 10|1+c| \leq 1-c \Rightarrow \left(10(1+c) \leq 1-c\right) \wedge \left(10(1+c) \geq -1+c\right)$$

$10(1+c) \leq 1-c \Rightarrow 11c \leq -9 \Rightarrow c \leq \frac{-9}{11}$ و

$10(1+c) \geq -1+c \Rightarrow 9c \geq -11 \Rightarrow c \geq \frac{-11}{9}$

أي $c \in [\frac{-11}{9}, \frac{-9}{11}] / \{-1\}$

اجمالاً تكون الجملة مريضة عندما $c \in [\frac{9}{11}, \frac{11}{9}] \cup [\frac{-11}{9}, \frac{-9}{11}] / \{\pm 1\}$

◄ السؤال الخامس ►

لدينا النقاط $x_0(1, 2.72)$ و $x_1(1.05, 3.29)$ و $x_2(1.08, 3.66)$ و $x_3(1.1, 3.90)$

1) لايجاد حدودية لاغرانج من الدرجة الثانية فعلينا اختيار ثلاث نقاط فقط من النقاط السابقة وبما أننا سنوجد الحدودية من أجل تعيين $f(1.04)$ فنلاحظ أن بعد هذه النقطة الأخيرة عن النقطة x_3 أكبر من بعدها عن بقية النقاط لذلك سنستبعد x_3 ونحسب الحدودية المارة ببقية النقاط

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1.05)(x-1.08)}{(1-1.05)(1-1.08)} = \frac{(x-1.05)(x-1.08)}{0.004}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-1.08)}{(1.05-1)(1.05-1.08)} = \frac{(x-1)(x-1.08)}{-0.0015}$$

$$L_{2,2}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-1.05)}{(1.08-1)(1.08-1.05)}=\frac{(x-1)(x-1.05)}{0.0024}$$

وبالتالي :

$$P_2(x)=f(x_0)*L_{2,0}(x)+f(x_1)*L_{2,1}(x)+f(x_2)*L_{2,2}(x)$$

$$=2.72\frac{(x-1.05)(x-1.08)}{0.004}+3.29\frac{(x-1)(x-1.08)}{-0.0015}+3.66\frac{(x-1)(x-1.05)}{0.0024}$$

$$=680(x^2-2.13x+1.134)-2193.33(x^2-2.08x+1.08)+1525(x^2-2.05x+1.05)$$

$$=11.67x^2-1448.4x+771.12+4562.13x-2368.8-3126.25x+1601.25$$

$$=11.67x^2-12.52x+3.57$$

2) لدينا $f(x)=3xe^x-2e^x$ ،ان الصيغة العامة للخطأ في حالتنا تكتب بالشكل :

$$f(x)-P_2(x)=\frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-1)(x-1.05)(x-1.08):x\in[1,1.08],\xi(x)\in[1,1.08]$$

نحسب المشتق الثالث $f'''(x)$:

$$f'(x)=3e^x+3xe^x-2e^x=3xe^x+e^x$$

وبالتالي : $$f''(x)=3e^x+3xe^x+e^x=3xe^x+4e^x$$

وبالتالي : $$f'''(x)=3e^x+3xe^x+4e^x=3xe^x+7e^x$$

وبما أن $\xi(x)\in[1,1.08]$ نستطيع أن نكتب :

$$f(x)-P_2(x)\le\left|\frac{(x-1)(x-1.05)(x-1.08)}{6}\right|(3.24e^{1.08}+7e^{1.08})$$

والطرف الأيمن يمثل الحد الأعلى للخطأ المرتكب عندما $x\in]1,1.08[$ ، ولايجاد الحد الأعلى للخطأ عندما $x=1.04$ نعوض هذه القيمة في العلاقة فينتج :

$$|f(1.04)-P_2(1.04)| \le \left|\frac{(1.04-1)(1.04-1.05)(1.04-1.08)}{6}\right|(3.24e^{1.08}+7e^{1.08})$$

$$|f(1.04)-P_2(1.04)| \le 266*10^{-8}(3.24*2.9447+7*2.9447)$$

$$|f(1.04)-P_2(1.04)| \le 266*10^{-8}(9.5408+20.6129)$$

$$|f(1.04)-P_2(1.04)| \le 8020.8842*10^{-8} \approx 0.8021*10^{-4}$$

الخطأ الفعلي : $f(1.04)-P_2(1.04)=3.1687-3.1715=-0.0028$

وهو أقل من الحد الأعلى للخطأ.