Dr. Berlant Matit

Numeral Analysis

Ahmad Dabank **Ahmed_22803** **C3**

HW1

السؤال الأول :

الطلب الأول :

$$Q(x) = ((x-3)\ x+3)x-1$$

$$= (x^2-3x+3)x-1$$

$$= x^3-3x^2+3x-1 = P(x)$$

الطلب الثاني :

لحساب P(2.19) نعوّض في معادلة P(x) وندوّر الأرقام بعد الفاصلة إلى ثلاث أرقام كما يلي

$$P(2.19) = (2.19)^3 - 3(2.19)^2 + 3(2.19) - 1$$

$$= (10.50) - 3(4.79) + 3(2.19) - 1$$

$$= 1.7$$

ثم نحسب Q(2.19) وندوّر الأرقام أيضا إلى ثلاث أرقام فنجد

$$Q(2.19) = ((2.19-3)2.19+3)2.19-1$$

وبالحساب مع التدوير نجد الناتج $Q(x) = 1.69$

الطلب الثالث :

بما أن القيمة الفعلية $T = 1.685159$

فإن الخطأ الفعلي عند حساب P(x) هو

$$|T - P(x)| = |1.685159 - 1.7| = 0.014841$$

والخطأ النسبي عند حساب P(x) هو

$$\frac{E}{T} = \frac{0.014841}{1.685159} \approx 0.008806$$

بينما الخطأ الفعلي عند حساب Q(x) هو

$$|T - Q(x)| = |1.685159 - 1.69| = 0.004841$$

والخطأ النسبي عند حساب Q(x) هو

$$\frac{E}{T} = \frac{0.004841}{1.685159} \approx 0.002872$$

السؤال الثاني :

الطلب الأول :

$$f(0) = 2\cos(0) - e^{0} = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^{-\frac{\pi}{2}} \approx -0.2787 < 0$$

بما أنّ

التابع معرّف ومستمرّ على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(0) > 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

$\Leftarrow$ يوجد للمعادلة جذر في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

حسب مبرهنة القيمة الوسطى

الطلب الثاني :

التابع $f(x) = 2\cos(x) - e^{-x}$ $x_1 = \frac{\pi}{2}$ $x_0 = 0$

نحسب قيم x المتتالية من العلاقة

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$ وننظمها كما يلي

n	x_n	x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
0	0	$\pi/2$	-0.2078
1	$\pi/2$	1.3	0.2624
2	1.3	1.4511	0.0045

وبالتالي فإن جذر التابع باستخدام طريقة القاطع مرتين هو x=1.4511

وبما أننا نستخدم طريقة القاطع فإن مرتبة التقارب P = 1.62

السؤال الثالث :

الطلب الأول :

$$g(x) = \frac{2(x+1)}{x+2} \Leftarrow g'(x) = \frac{2(x+2) - 2(x+1)}{(x+2)^2}$$

$g'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$ فالتابع متزايد تماماً على المجال [1,2]

وبمّا أنّ

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = \frac{4}{3} > 1 \\ g(2) = \frac{3}{2} < 2 \\ g(x) \text{ متزايد تماماً على المجال } [1,2] \end{array}\right\} \Rightarrow g([1,2]) \subset [1,2]$$

الطلب الثاني :

$$\left|g(x)-g(y)\right| \le \frac{1}{2}\left|x-y\right| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left|g(x)-g(y)\right|}{\left|x-y\right|} \le \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) \le \frac{1}{2}$$

وبما أن

$$\left\{\begin{array}{l} g'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2} \\ \\ x \in [1,2] \end{array}\right. \Leftarrow \quad Max \;\; g'(x) = \frac{2}{9}$$

أي أنّ $g'(x) \le \dfrac{2}{9}$

وبما أن $\dfrac{2}{9} < \dfrac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad g'(x) < \dfrac{1}{2}$

الطلب الثالث :

لإثبات صحة التكافؤ المعطى يجب

أولاً : إثبات أنّ $x = g(x) \quad \Leftarrow \quad f(x) = 0$

لدينا $x = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{2(x+1)}{x+2} \quad \Leftarrow \quad 2x+2 = x^2+2x$

$$\Leftarrow \quad x^2-2=0 \quad \Leftarrow \quad f(x)=0$$

ثانياً : إثبات أنّ $f(x) = 0 \quad \Leftarrow \quad x = g(x)$

لدينا $x^2-2=0$ بطرح -2 من طرفي المعادلة نجد

$$x^2-4=-2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-2)=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=\frac{-2}{x+2}$$

وبتوحيد المقامات والجمع نجد $x = 2 - \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow$

$$x = \frac{2(x+2)-2}{x+2} = \frac{2x+2}{x+2} = \frac{2(x+1)}{x+2} = g(x)$$

الطلب الرابع :

وبالتالي فإنّ $x_0 = 2$ $\quad x_{n+1} = g(x_n)$

$$x_1 = g(x_0) = g(2) = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = g(x_1) = g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{10}{7}$$

$$x_3 = g(x_2) = g\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{17}{12}$$

$$x_4 = g(x_3) = g\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{58}{41}$$

$$x_5 = g(x_4) = g\left(\frac{58}{41}\right) = \frac{99}{70}$$

نلاحظ أنّ قيم x تتقارب من قيمة $\sqrt{2}$ التي هي جذر للتابع $f(x)$

وهذا منطقي وطبيعي بسبب وجود التكافؤ $x = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0$

أي أنّ $\lim_{n \to \infty} (x_n) = \sqrt{2}$

الطلب الخامس :

بما أنّ $\frac{1}{2^n} < 10^{-6} \quad \Leftarrow \quad n \geq 20$

السؤال الرابع :

نلاحظ أن $A = A^T$ وبالتالي فالمصفوفة A نظامية

وبما أنها نظامية فإنّ $cond_2(A) = \dfrac{\max \lambda}{\min \lambda}$

في البداية نحسب القيم الذاتية $\begin{bmatrix} 1-\lambda & C \\ C & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$(1-\lambda)^2 - C^2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 - C^2 = 0$$

وبحلّ المعادلة نجد أن $\lambda_1 = 1 + C$ $\quad \lambda_2 = 1 - C$

كما أنه لدينا من الفرض $C \neq 1$ أي أن

$$C \in]-\infty,-1[\; \cup \;]-1,1[\; \cup \;]1,+\infty[$$

لنأخذ C =0.01 أو C=-0.01 نجد $cond_2(A) \approx 1.02$

وبأخذ C = 0.1 أو C = -0.1 نجد $cond_2(A) \approx 1.2$

وبأخذ C=0.9 أو C = -0.9 نجد $cond_2(A) = 19$

وبأخذ C=1.1 أو C= -1.1 نجد $cond_2(A) = -21$

وبأخذ C = 1.5 أو C = -1.5 نجد $cond_2(A) = -5$

وبأخذ C = 2 أو C=-2 فيكون $cond_2(A) = -3$

وبأخذ C =10 أو C=-10 نجد $cond_2(A) = \dfrac{11}{-9}$

وبأخذ C=100 أو C=-100 نجد $cond_2(A) = \dfrac{101}{-99}$

مما سبق نلاحظ أنه كلما اقتربت قيمة C من الواحد بالقيمة المطلقة كان $cond_2(A)$ كبيرا وبالتالي كانت A مريضة

وكلما ابتعدت قيمة C عن الواحد بالقيمة المطلقة كان $cond_2(A)$ صغيرا وبالتالي كانت A سليمة

السؤال الخامس :

الطلب الأول :

بما أن المطلوب إيجاد حدودية لاغرانج من الدرجة الثانية فنحن بحاجة إلى ثلاث نقاط

وبالتالي نختار من النقاط الأربع المعطاة النقاط الثلاث الأقرب للنقطة التي فاصلتها x=1.04

للحصول على الحدودية الأنسب

وبهذا يكون لدينا النقاط

$x_0\,(1\ ,\ 2.72)$ $\qquad$ $x_1(1.05\ ,\ 3.29)$ $\qquad$ $x_2(1.08\ ,\ 3.66)$

والحدودية المطلوبة من الشكل

$$P(x) = y_0 \quad L_{2,0} + y_1 \quad L_{2,1} + y_2 \quad L_{2,2}$$

لدينا

$$L_{2,0} = \frac{(x-1.05)(x-1.08)}{(1-1.05)(1-1.08)} = \frac{(x-1.05)(x-1.08)}{0.004}$$

$$L_{2,1} = \frac{(x-1)(x-1.08)}{(1.05-1)(1.05-1.08)} = \frac{(x-1)(x-1.08)}{-0.0015}$$

$$L_{2,2} = \frac{(x-1)(x-1.05)}{(1.08-1)(1.08-1.05)} = \frac{(x-1)(x-1.05)}{0.0024}$$

وبالتالي فإن حدودية لاغرانج التربيعية المطلوبه هي

$$P_2(x) = 2.72\,\frac{(x-1.05)(x-1.08)}{0.004} - 3.29\,\frac{(x-1)(x-1.08)}{0.0015} + 3.66\,\frac{(x-1)(x-1.05)}{0.0024}$$

وبالاختصار نجد

$$\boxed{P_2(x) = 680(x-1.05)(x-1.08) - 2193.33(x-1)(x-1.08) + 1525(x-1)(x-1.05)}$$

الطلب الثاني :

بما أن الحدودية من الدرجة الثانية $\Leftarrow$ الخطأ من الدرجة الثالثة

$$E = T - Q \le f^{(3)} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!}$$

وبذلك فالحدّ الأعلى للخطأ المرتكب هو

$$Max(E) = T - Q \le Max\left[f^{(3)} \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} \right]$$

ولحساب هذا المقدار لدينا

$$f(x) = 3xe^x - 2e^x$$

$$f'(x) = 3xe^x + e^x$$

$$f^{(2)}(x) = 3xe^x + 4e^x$$

$$f^{(3)}(x) = 3xe^x + 7e^x = (3x + 7)e^x$$

وهذا الأخير متزايد تماما على المجال [1,1.1]

وبالتالي فإن $Max(f^{(3)}(x)) = f^{(3)}(1.1) = 10.3 * e^{1.1} = 30.94291$

كما أنه لدينا الحدودية

$$E_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x - 1.05)(x - 1.08)$$

$$= x^3 - 3.13x^2 + 3.264x - 1.134$$

لمعرفة قيمة $|Max(E_3(x))|$ ندرس تحولات التابع $E_3(x)$

ومن دراسة تحولات التابع نجد أن التابع يأخذ قيمة عظمى بالقيمة المطلقة عند x=1

وهو $|Max(E_3(x)| = 0.1376$

وبالتالي فإن الحدّ الأعلى للخطأ المرتكب (وهو نفسه لجميع النقاط)

$$|Max(E)| = \frac{30.94291 * 0.1376}{3 * 2} \approx 0.709624$$

أما الخطأ الفعلي يتم حسابه من العلاقة

$$E = |f(1.04) - P_2(1.04)|$$

$$\mathrm{E} = |3.1687231 - 3.17128| = 0.025569$$

انتهى بعونه تعالى