◄ السؤال الأول ►

لدينا $f(x)=x^n$ و $m+1$ نقطة مختلفة من x_0 حتى x_m

عندما $m=n$ يكون عندنا $n+1$ نقطة وحدودية الاستيفاء $f(x)$ من الدرجة n وبالتالي

$f[x_0,x_1,.....,x_m]$ هي أمثال الحد x^n أي أن $f[x_0,x_1,.....,x_m]=1$

وعندما $m>n$ يكون عدد نقاط الاستيفاء يفوق درجة حدودية الاستيفاء باثنين على الأقل

وبالتالي $f[x_0,x_1,.....,x_m]$ هي أمثال الحد x^{n+1} اذا كانت $m=n+1$ أو هي أمثال

الحد x^{n+2} اذا كانت $m=n+2$ ....وهكذا وبالتالي $f[x_0,x_1,.....,x_m]=0$ في جميع

هذه الحالات.

◄ السؤل الثاني ►

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=2x^3 : 0\le x\le 1 \\ S_1(x)=x^3+3x^2-3x+1 : 1\le x\le 2 \\ S_2(x)=9x^2-15x+9 : 2\le x\le 3 \end{cases}$$

نتحقق من استمرار $S(x)$ عند نقاط العقد $x_1=1$ و $x_2=2$

$S_0(1)=2, S_1(1)=2 \Rightarrow S_0(1)=S_1(1)$ و $S_1(2)=15, S_2(2)=15 \Rightarrow S_1(2)=S_2(2)$

فالاستمرار محقق .

نحسب المشتق الأول :

$$S'(x)=\begin{cases} S_0'(x)=6x^2 :: 0\le x\le 1 \\ S_1'(x)=3x^2+6x-3 :: 1\le x\le 2 \\ S_2'(x)=18x-15 :: 2\le x\le 3 \end{cases}$$

نتحقق من استمرار $S'(x)$ عند نقاط العقد $x_1=1$ و $x_2=2$

$S_1'(2)=21, S_2'(2)=21 \Rightarrow S_1'(2)=S_2'(2)$ و $S_0'(1)=6, S_1'(1)=6 \Rightarrow S_0'(1)=S_1'(1)$

فالاستمرار محقق أيضاً .

نحسب المشتق الثاني :

$$S''(x)=\begin{cases} S_0''(x)=12x :: 0\le x\le 1 \\ S_1''(x)=6x+6 :: 1\le x\le 2 \\ S_2''(x)=18 :: 2\le x\le 3 \end{cases}$$

نتحقق من استمرار $S''(x)$ عند نقاط العقد $x_1=1$ و $x_2=2$

$S_1''(2)=18, S_2''(2)=18 \Rightarrow S_1''(1)=S_2''(1)$ و $S_0''(1)=12, S_1''(1)=12 \Rightarrow S_0''(1)=S_1''(1)$

فالاستمرار أيضاً محقق .

نختبر الشرط الحر : $S_0''(0)=0, S_2''(3)=18\ne 0$

فالشرط الحر غير محقق وبالتالي $S(x)$ لايحقق شريحة سيبلن التكعيبية الحرة

◄ السؤال الثالث ►

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=(x+1)^3 : -2\le x\le -1 \\ S_1(x)=ax^3+bx^2+cx+d : -1\le x\le 1 \\ S_2(x)=(x-1)^2 :: 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$S_0(-1)=S_1(-1) \Rightarrow -a+b-c+d=0 \qquad (1)$$

$$S_1(1)=S_2(1) \Rightarrow a+b+c+d=0 \qquad (2)$$

نحسب المشتق الأول :

$$S'(x)=\begin{cases} S_0'(x)=3(x+1)^2 :: -2\le x\le -1 \\ S_1'(x)=3ax^2+2bx+c :: -1\le x\le 1 \\ S_2'(x)=2(x-1) :: 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$S_0'(-1)=S'_1(-1)\Rightarrow 3a-2b+c=0 \qquad (3)$$

$$S_1'(1)=S'_2(1)\Rightarrow 3a+2b+c=0 \qquad (4)$$

نحسب المشتق الثاني :

$$S''(x)=\begin{cases} S_0''(x)=6(x+1)::-2\le x\le -1 \\ S_1''(x)=6ax+2b::-1\le x\le 1 \\ S_2''(x)=2::1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$S_0''(-1)=S''_1(-1)\Rightarrow -6a+2b=0 \qquad (5)$$

$$S_1''(1)=S''_2(1)\Rightarrow 6a+2b=2 \qquad (6)$$

بحل المعادلتين (5) و (6) نجد أن $a=\dfrac{1}{6}$ و $b=\dfrac{1}{2}$ ، عند التعويض بالمعادلتين (3) و (4)

نلاحظ عدم امكانية ايجاد أي قيمة ل c تحقق المعادلتين معاً وبالتالي الجملة مستحيلة الحل

والتابع $S(x)$ لايشكل شريحة سيبلن مهما تكن قيمة الثوابت .

◄السؤال الرابع►

لدينا $S(x)$ الشريحة التكعيبية المقيدة :

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=22-9(x-1)-(x-1)^3::1\le x\le 2 \\ S_1(x)=A+B(x-2)+C(x-2)^2+D(x-2)^3::2\le x\le 3 \end{cases}$$

ان $S(x)$ مستمر عند نقطة العقدة $x_1=2$ وبالتالي :

$$S_0(2)=S_1(2)\Rightarrow A=12$$

نحسب المشتق الأول :

$$S'(x)=\begin{cases} S_0'(x)=-9-3(x-1)^2 :: 1\le x\le 2 \\ S_1'(x)=B+2C(x-2)+3D(x-2)^2 :: 2\le x\le 3 \end{cases}$$

ان $S'(x)$ مستمر عند نقطة العقدة $x_1=2$ وبالتالي :

$$S_0'(2)=S_1'(2)\Rightarrow B=-12$$

نحسب المشتق الثاني :

$$S''(x)=\begin{cases} S_0''(x)=-6(x-1) :: 1\le x\le 2 \\ S_1''(x)=2C+6D(x-2) :: 2\le x\le 3 \end{cases}$$

ان $S''(x)$ مستمر عند نقطة العقدة $x_1=2$ وبالتالي :

$$S_0''(2)=S_1''(2)\Rightarrow -6=2C\Rightarrow C=-3$$

ولدينا الشرط المقيد محقق أي : $f'(1)=S'(1)$ و $f'(3)=S'(3)$ ولكن $f'(1)=f'(3)$

وبالتالي :

$$S'(1)=S'(3)\Rightarrow -9=-12-6+3D\Rightarrow 9=3D\Rightarrow D=3$$

◄ السؤال الخامس ►

لدينا التكامل $I=\int_0^{2\pi}\sin x^2 dx$ ونريد حساب قيمته باستخدام طريقة سيمسون المركبة

حيث $n=4$ أي نقطع المجال المطلوب لأربع مجالات متساوية الطول حيث طول كل منها هو :

$h=\frac{b-a}{4}=\frac{2\pi-0}{4}=\frac{\pi}{2}$ وعندنا بالتالي خمسة نقاط :

$$x_0=a=0\Rightarrow f(x_0)=f(0)=0$$

$$x_1=x_0+h=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x_1)=f(\frac{\pi}{2})\approx 0.624266$$

$$x_2 = x_0 + 2h = \pi \Rightarrow f(x_2) = f(\pi) \approx -0.430301$$

$$x_3 = x_0 + 3h = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(x_3) = f(\frac{3\pi}{2}) \approx -0.213798$$

$$x_4 = b = 2\pi \Rightarrow f(x_4) = f(2\pi) = 0.978340$$

نطبق القانون :

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x^2 dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(\frac{\pi}{2}) + 2f(\pi) + 4f(\frac{3\pi}{2}) + f(2\pi)\right]$$

$$\approx 0.523597\left(0 + 2.497064 - 0.860602 - 0.855192 + 0.978340\right)$$

$$= 0.523597 * 1.759610 \approx 0.921326$$

◄ السؤال السادس ►

لدينا التكامل $I = \int_1^3 \ln(2x+1)dx$ ونريد ايجاد القيمتين n,h باستخدام طريقة شبه المنحرف

المركبة علماً أن الخطأ $E \leq \frac{1}{1000}$

نطبق قانون حساب الخطأ لهذه الطريقة : $E = \frac{h^2(b-a)}{12}|f''(\xi)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\xi)|$

وان أعظم قيمة للخطأ نحصل عليها عندما يكون $|f''(\xi)| = \max|f''(x)|$

نحسب المشتق الثاني للتابع $f(x) = \ln(2x+1)$:

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4}{(2x+1)^2}$$

ويكون $|f''(x)| = \frac{4}{(2x+1)^2}$ وهو تابع متناقص تماماً على المجال $[1,3]$ وبالتالي يصل

لأكبر قيمه له عندما تكون $x = 1$ أي $\max |f''(x)|_{[1,3]} = f''(1) = \frac{4}{9}$

نعوض في القانون :

$$E = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max |f''(x)| = \frac{8}{12n^2} * \frac{4}{9} = \frac{8}{27n^2}$$

$$E \le \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{8}{27n^2} \le \frac{1}{1000} \Rightarrow 27n^2 \ge 8000 \Rightarrow n^2 \ge 296.296 \Rightarrow n \ge 17.213$$

أي يجب أن تكون $n = 18$ أو أكثر وبالتالي $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ أو أصغر .