RATIONAL APPROXIMATION

PADE AND CHEBYSHEV METHOD

D.Berlant,Mattit

لنسأل:

هل التقريب بكثيرات حدود دائماً جيد ؟

هل هناك تقريب بدوال أخرى يعطي نتائج أفضل؟

في الحقيقة تبين أن استخدام الحدوديات في التقريب ليس دائماً جيد و ذلك لميلها إلى التذبذب ، و غالباً ما يؤدي هذا إلى تجاوز الخطأ في التقريب بحدوديات لقيمته العظمى(أي أعظم خطأ مقبول) هذا من جهة.

من ناحية أخرى سوف نتبنى الآن طرق تقلل من قيمة الخطأ الأعظمي ، وسوف يستخدم في هذه الطرق الدوال الكسرية.

التابع الكسري: يعرف التابع الكسري من الدرجة N بالشكل:

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x)$ و $q(x)$ هي حدوديات مجموع درجتيهما يساوي N .

التقريب الكسري:

إن التقريب لكسري من الدرجة N لتابع $f(x)$ على مجال مغلق $[a,b]$ هو حاصل قسمة

الحدوديتين $p_n(x)$ و $q_m(x)$ من الدرجة n و m على الترتيب حيث $N=n+m$ و

يحقق شروط معينة تبعاً لطريقة التقريب المستخدمة.

$$R_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \quad ...(1)$$

أولاً:طريقة Pade :

و تتطلب هذه الطريقة:

1. أن يكون التابع $f(x)$ المقرب معرف على مجال I يحوي الصفر و مشتقاته مستمرة عند $x=0$ (أي تحليلي عند $x=0$) ، و هناك سببين لهذا الإختيار: الأول يعود لسهولة التعامل مع الصفر، و الثاني هو أنه يمكن بإجراء تغيير للمتحول أن ننقل جميع الحسابات من مجال ما $[a,b]$ إلى مجال يحوي الصفر مثل $[-1,1]$ وفق التحويل:

$$y = \frac{2x-(a+b)}{b-a}$$

إن الحدوديات في (1) تكتب بالشكل :

$$p_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k \qquad (2)$$

$$q_m(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_{\mathrm{m}} x^{\mathrm{m}} = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k \qquad (3)$$

٢. أن نبني الحدوديات في (2) و (3) بحيث تتطابق $f(x)$ و $R_{n,m}(x)$ عند $x=0$

و تتطابق مشتقاتهما أيضاً حتى $n+m$ عند $x=0$.

ملاحظات

١. $q_m(x) = 1$ التقريب الكسري هو نشر ماكلوران للدالة $f(x)$ من الدرجة n.

٢. من أجل قيمة مثبتة ل $n+m$ ، يكون الخطأ أصغرياً عندما يكون $n \leq m$.

٣. المعامل الثابت في $q_m(x)$ لا يمكن أن يكون صفراً إذ يصبح $R_{n,m}(x)$ غير معرف عند الصفر .

٤. بما أن $q_0 \neq 0$ فإنه يمكن بتقسيم كل من $p_n(x)$ و $q_m(x)$ على q_0 أن نحصل على $q_0 = 1$ معامل ثابت ل $q_m(x)$ إذن الاختيار $q_0 = 1$ دائماً ممكن.

نتيجة : يوجد $n+m+1$ معامل ل $R_{n,m}(x)$ يجب حسابها .

لما اشترطت طريقة *Pade* أن يكون التابع $f(x)$ تحليلي فإن نشر ماكلوران للتابع $f(x)$ موجود وله الشكل:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \qquad \text{........(1')}$$

و لدينا وفقاً لطريقة *Pade*

$$f^{(k)}(0) = R_{n,m}^{(k)}(0) \quad \text{....(4)}$$

حيث : $k = 0, 1, 2, \dots, n+m$

و لكن وفقاً للمبرهنة:

إذا كان $f^{(k)}(0) = R_{n,m}^{(k)}(0)$ حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n+m$ فإن التابع $f - R_{n,m}$ لا يملك حدود من قوى أقل أو تساوي $n+m$ و ذلك في جوار للصفر.

تكون لدينا المعادلة التقريبية التالية:

$$f(x) - \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \approx 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)q_m(x) - p_n(x)}{q_m(x)} \approx 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q_m(x)} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{j=n+m+1}^{\infty} c_j \, x^j$$

بالمطابقة بين أمثال $x^0, x^1, \dots, x^{n+m}$ في الطرف الأول مع مقابلاتها في الثاني نجد:

$$a_0 - p_0 = 0$$

$$q_1 a_0 + a_1 - p_1 = 0$$

$$q_2 a_0 + q_1 a_1 + a_2 - p_2 = 0$$

$$q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3 - p_3 = 0$$

....

....

و يمكن أن نكتب جملة المعادلات السابقة بالشكل:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} = p_k \; ; \; k = 0, 1, \dots, n+m \quad (5)$$

حيث نفرض:

$$p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_{n+m} = 0$$

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_{m+n} = 0$$

و تمثل (5) جملة معادلات خطية عددها $n+m+1$ معادلة ب $n+m+1$ مجهول و المجاهيل هي:

$$q_1, q_2, \dots, q_m, p_0, p_1, \dots, p_n.$$

و بحلها نحصل على $R_{n,m}(x)$ المنشود.

مثال:

أوجد تقريب $Pade$ $R_{3,2}(x)$ من الدرجة الخامسة للتابع:

$$f(x) = e^{-x}$$

الحل:

١. المدخلات :

$.f(x) = e^{-x}, n = 3, m = 2$

٢. المخرج: $R_{3,2}(x)$.

٣. اختبار $f(x)$ فيما إذا كان تحليلي في جوار $x=0$ وهذا واضح.

٤. كتابة نشر ماكلوران للدالة $f(x)$.

$$e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

٥. نعوض في (5) فنحصل على جملة المعادلات:

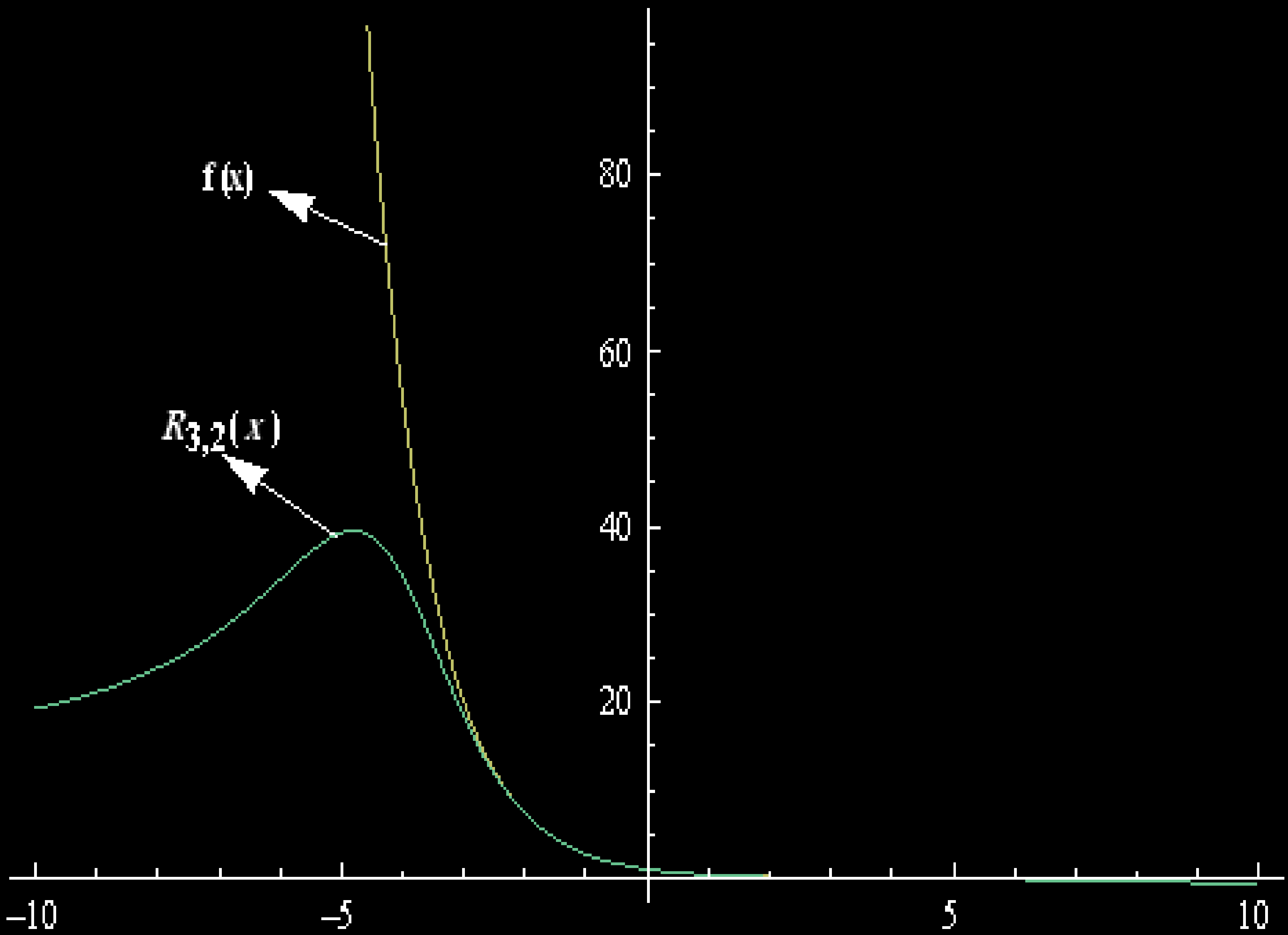
$$\left.\begin{aligned} x^5 &: -\frac{1}{120}+\frac{1}{24}q_1-\frac{1}{6}q_2=0 \\ x^4 &: \frac{1}{24}-\frac{1}{6}q_1+\frac{1}{2}q_2=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^3 &: -\frac{1}{6}+\frac{1}{2}q_1-q_2=p_3 \\ x^2 &: \frac{1}{2}-q_1+q_2=p_2 \\ x^1 &: -1+q_1=p_1 \\ x^0 &: 1=p_0 \end{aligned}\right\}$$

$$p_0 = 1, p_1 = -\frac{3}{5}, p_2 = \frac{3}{20}, p_3 = -\frac{1}{60}$$

$$q_1 = \frac{2}{5}, q_2 = \frac{1}{20}$$

$$R_{3,2}(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \quad \ldots(6)$$



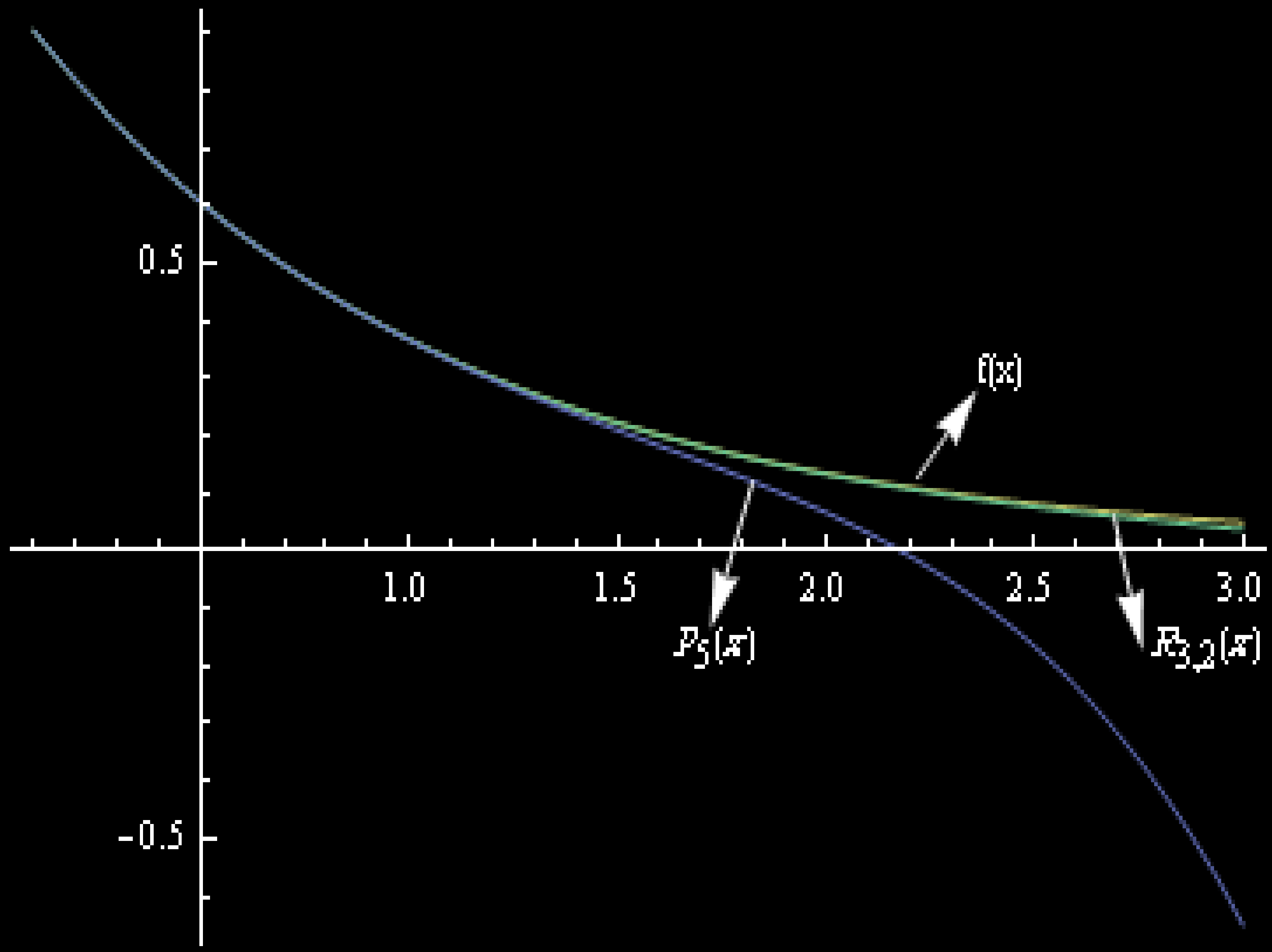
f(x)
$R_{3,2}(x)$
80
60
40
20
−10
−5
5
10

سوف نقارن الآن بين الخطأ الأعظمي في تقريب $f(x)$ إلى $P_5(x)$ و
الخطأ الأعظمي في تقريب $f(x)$ إلى $R_{3,2}(x)$ حيث:

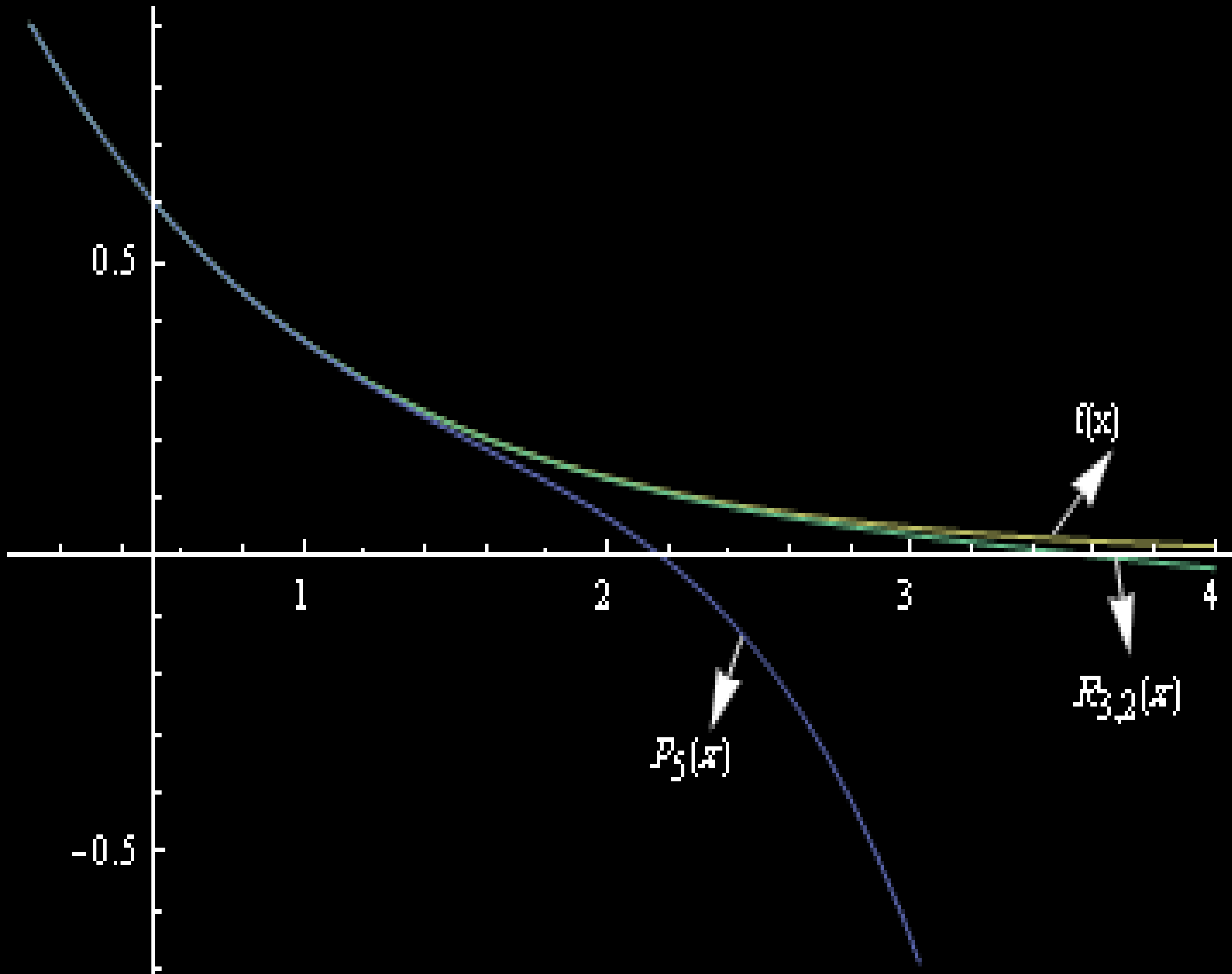
$$P_5(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5$$

من أجل بعض القيم.

x	e^{-x}	$P_5(x)$	$\lvert P_5(x) - e^{-x}\rvert$	$R_{3,2}(x)$	$\lvert R_{3,2}(x) - e^{-x}\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873067	8.64*10^-8	0.81873075	7.55*10^-9
0.4	0.67032005	0.67031467	5.38*10^-6	0.67031963	4.11*10^-7
0.6	0.54881164	0.54875200	5.96*10^-5	0.54880763	4.00*10^-6
0.8	0.44932896	0.44900267	3.26*10^-4	0.44930966	1.93*10^-5
1.0	0.36787944	0.36666667	1.21*10^-3	0.36781609	6.33*10^-5



0.5
−0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
f(x)
$P_5(x)$
$R_{3,2}(x)$


0.5
−0.5
1
2
3
4
f(x)
$R_{3,2}(x)$
$P_5(x)$

الكسور المستمرة:

مثال:اكتب التابعين الكسريين التاليين على شكل كسور مستمرة:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 4} \quad , \quad \frac{2x^3 + x^2 - x + 3}{3x^3 + 2x^2 - x + 1}$$

الحل:

أ. $$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 4} = 2x - 7 + \frac{10x + 23}{x^2 + 2x + 4}$$

$$= 2x - 7 + \cfrac{1}{\cfrac{x^2 + 2x + 4}{10x + 23}}$$

$$= 2x - 7 \cfrac{1}{\frac{1}{10}x - \frac{3}{100} + \cfrac{469/100}{10x+23}}$$

۲.

$$\frac{2x^3+x^2-x+3}{3x^3+2x^2-x+1} = \frac{2}{3} + \cfrac{1}{-9x+3+\cfrac{1}{-\frac{1}{36}x-\frac{1}{24}+\cfrac{27/4}{12x-6}}}$$

و بنفس الأسلوب السابق نكتب $R_{3,2}(x)$ بالشكل:

$$R_{3,2}(x) = -\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}+\frac{-152/3}{\left(x+\frac{117}{19}+\frac{3125/361}{(x+(35/19))}\right)} \quad \ldots.(7)$$

$$R_{3,2}(x) = \frac{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3}{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2} \quad \ldots(6)$$

إن الشكل (7) أبسط من الشكل (6)، و ذلك لأنه في (6) يوجد 5 عمليات جمع(طرح) و 5 عمليات ضرب وعملية قسمة واحدة ، في حين في (7) يوجد 5 عمليات جمع(طرح) و عملية ضرب واحدة و عمليتي قسمة.

مثال: أنشئ تقريب Pade التالي:

$$\cos x \approx R_{4,4}(x) = \frac{15120-6900x^2+313x^4}{15120+660x^2+13x^4}$$

الحل :

نلاحظ أن كل من $R_{4,4}(x)$ و $\cos x$ توابع زوجية لذا سوف نفرض من أجل التبسيط

$$f(x) = \cos\sqrt{x}$$

فإن أوجدنا $R_{2,2}(x)$ لـ $f(x)$ نكون قد أوجدنا $R_{4,4}(x)$ لـ $\cos x$.

إن $f(x)$ تحليلي في جوار الصفر و نشر ماكلوران له يعطى بالشكل:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{40320}x^4 - \cdots$$

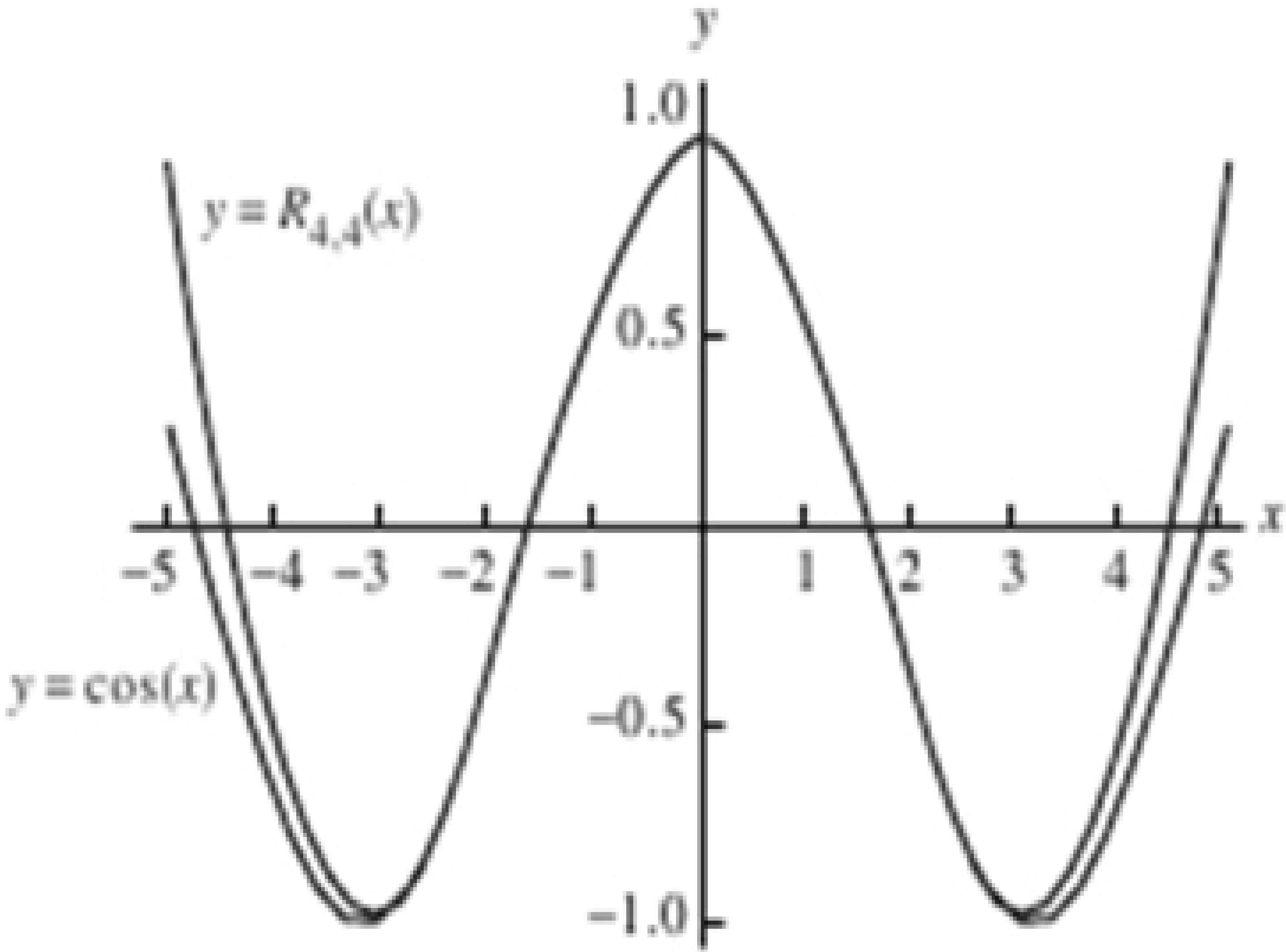
بالتعويض في (5) نحصل على المعادلات:

$$\left.\begin{aligned} 1 - p_0 &= 0 \\ \frac{-1}{2} + q_1 - p_1 &= 0 \\ \frac{1}{24} - \frac{1}{2} q_1 + q_2 - p_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{720} + \frac{1}{24} q_1 - \frac{1}{2} q_2 &= 0 \\ \frac{1}{40320} - \frac{1}{720} q_1 + \frac{1}{24} q_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

بحلها ينتج:

$$f(x) = \frac{1 - 115x/252 + 313x^2/15120}{1 + 11x/252 + 13x^2/15120} \qquad (*)$$



y
1.0
0.5
−0.5
−1.0
x
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
y = R_{4,4}(x)
y = cos(x)

مثال:أوجد تقريب $Pade$ من الدرجة 6 حيث $n=m=3$ للتابع:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

الحل: لنرى فيما إذا كان التابع $f(x)$ تحليلي في جوار الصفر ولنستنتج نشر ماكلوران له.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f(0) = 1$$

$$\acute{f}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \frac{-te^{-t}}{(1+xt)^2}\,dt$$

$$\acute{f}(0) = \int_0^\infty -\mathrm{te}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}$$

$$f'(0) = \left[te^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t}\,dt$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2e^{-t}(1+xt)}{(1+xt)^4}dt$$

$$f''(0) = \int_0^\infty 2t^2 e^{-t}\, dt$$

$$f''(0) = 2(2!)$$

$$f'''(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-t}\left(3t(1+xt)^2\right)}{(1+xt)^6} dt$$

$$f'''(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-t}\left(3t(1+xt)^2\right)}{(1+xt)^6} dt$$

$$f'''(0) = \int_0^{\infty} 2 \times 3t^3 e^{-t} dt = 3!3!$$

وبالاستقراء على مرتبة الاشتقاق عند الصفر نجد:

$$f^{(\mathrm{k})}(0) = (-1)^k (k!)^2$$

إذاً فالتابع المعطى تحليلي.

ومنه فإن متسلسلة ماكلورن:

$$f(x) = \sum_{k=0} (-1)^k k!\, x^k$$

$$f(x) = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 + \cdots$$

و ينتج لدينا باتباع طريقة *Pade* جملة المعادلات :

$$\left.\begin{array}{l} 720 - 120q_1 + 24q_2 - 6q_3 = 0 \\ -120 + 24q_1 - 6q_2 + 2q_3 = 0 \\ 24 - 6q_1 + 2q_2 - q_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6 + 2q_1 - q_2 + q_3 = p_3 \\ 2 - q_1 + q_2 = p_2 \\ -1 + q_1 = p_1 \\ 1 = p_0 \end{array}\right\}$$

وبحلها نجد أن:

$$R_{3,3}(x) = \frac{1+11x+26x^2+6x^3}{1+12x+36x^2+24x^3}$$

أما شكل الكسور المستمرة فهو:

$$R_{3,3}(x) = \frac{1}{4} + \cfrac{1}{24x/17+40/289+\cfrac{1}{-4913x/198-64213199/7566372-\cfrac{901991/365077449}{198x/289+\cfrac{17}{193}}}}$$

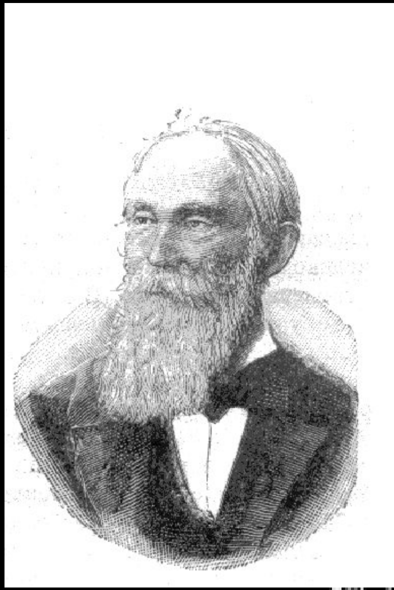
ملاحظة:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = (-1)^n n!; n \geq 0$$

x	e^{-x}	$P_5(x)$	$\lvert P_5(x)-e^{-x}\rvert$	$R_{3,2}(x)$	$\lvert R_{3,2}(x)-e^{-x}\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873067	8.64*10^-8	0.81873075	7.55*10^-9
0.4	0.67032005	0.67031467	5.38*10^-6	0.67031963	4.11*10^-7
0.6	0.54881164	0.54875200	5.96*10^-5	0.54880763	4.00*10^-6
0.8	0.44932896	0.44900267	3.26*10^-4	0.44930966	1.93*10^-5
1.0	0.36787944	0.36666667	1.21*10^-3	0.36781609	6.33*10^-5

ثانياً:طريقة تشيبتشيف:

ولكي نحصل على تقريب كسريٍ ذي دقة أكثر انتظاماً سوف نستخدم حدوديات تشيبتشيف و التي تسلك سلوك أكثر انتظاماً من حدوديات ماكلوران من خلال التقريب الكسريٍ بطريقة تشيبتشيف و تعتمد على نفس مبدأ طريقة تقريب $Pade$ ولكن باستبدال كل x^{k} ب $T_{\mathrm{k}}(x)$ في العلاقات (2)و (3) و $(1')$ فإذا رمزنا لهذا التقريب ب$R_{\mathrm{T}}(x)$ فإن:



$$R_T(x)=\frac{\sum_{k=0}^{n}p_kT_k(x)}{\sum_{k=0}^{m}q_kT_k(x)}$$

يدعى بتقريب تشيبتشيف الكسريٍ للتابع f(x) والذي نشره وفق تشيبتشيف هو.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

و بنفس الأسلوب الذي اتبعناه في طريقة تقريب **Pade** فإن:

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_k T_k(x) \sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x) - \sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x) \approx 0$$

و لكن عند المطابقة تظهر لدينا مشكلتين الأمر الذي يجعل هذه الطريقة أصعب من طريقة

: Pade

الأولى هي في الحد الأول من المعادلة السابقة حيث أنه يتضمن جداءات لحدوديات

تشيبتشيف و تحل هذه المشكلة باستخدام العلاقة

$$T_i(x)T_j(x) = \frac{1}{2}\left[T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x)\right]$$

و الثانية هي في حساب سلسلة تشيبتشيف للتابع $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

نظرياًهذا ليس صعب حيث لدينا من تعامد حدوديات تشيبتشيف :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad , \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad ;k \geq 1$$

مثال: إن الحدود الخمسة الأولى لنشر تشيبتشيف للتابع e^{-x} هي:

$$\tilde{P}(x) = 1.266066T_0(x) - 1.130318T_1(x) + 0.271495T_2(x) - 0.044337T_3(x) + 0.005474\,T_4(x) - 0.000543T_5(x)$$

لتحديد تقريب تشيبتشيف الكسري من الدرجة الخامسة حيث n=3 و m=2 علينا اختيار p_i

و q_i بحيث أنه من أجل k=0,1,2,3,4,5 أمثال $T_k(x)$ في المنشور التالي :

$$\tilde{P}(x)[T_0(x) + q_1T_1(x) + q_2T_2(x)] - [p_0T_0(x) + p_1T_1(x) + p_2T_2(x) + p_3T_3(x)]$$

جميعها أصفار.بالحساب سنجد أن :

$$R_{\mathrm{T}}(x) = \frac{1.055265T_0(x)-0.613016T_1(x)+0.077478T_2(x)-0.004506T_3(x)}{T_0(x)+0.378331T_1(x)+0.022216T_2(x)}$$

و لكن :

$$T_0(x) = 1\ ,T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_0(x) = 4x^3 - 3x$$

بالتعويض في الصيغة السابقة سنجد أن :

$$R_{\mathrm{T}}(x) = \frac{0.977787-0.599499x+0.154956x^2-0.018022x^3}{0.977784+0.378331x+0.044432x^2}$$

x	e^{-x}	$R_{3,2}(x)$	$\lvert R_{3,2}(x)-e^{-x}\rvert$	$R_T(x)$	$\lvert R_T(x)-e^{-x}\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873075	7.55*10^-9	0.81872510	5.66*10^-6
0.4	0.67032005	0.67031963	4.11*10^-7	0.67031310	6.95*10^-6
0.6	0.54881164	0.54880763	4.00*10^-6	0.54881292	1.28*10^-6
0.8	0.44932896	0.44930966	1.93*10^-5	0.44933809	9.13*10^-6
1.0	0.36787944	0.36781609	6.33*10^-5	0.36787155	7.89*10^-6

RATIONAL APPROXIMATION

PADE AND CHEBYSHEV METHOD

D.Berlant,Mattit

لنسأل:

هل التقريب بكثيرات حدود دائماً جيد ؟

هل هناك تقريب بدوال أخرى يعطي نتائج أفضل؟

في الحقيقة تبين أن استخدام الحدوديات في التقريب ليس دائماً جيد و ذلك لميلها إلى التذبذب ، و غالباً ما يؤدي هذا إلى تجاوز الخطأ في التقريب بحدوديات لقيمته العظمى(أي أعظم خطأ مقبول) هذا من جهة.

من ناحية أخرى سوف نتبنى الآن طرق تقلل من قيمة الخطأ الأعظمي ، وسوف يستخدم في هذه الطرق الدوال الكسرية.

التابع الكسري:يعرف التابع الكسري من الدرجة N بالشكل:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

حيث $p(x)$ و $q(x)$ هي حدوديات مجموع درجتيهما يساوي N .

التقريب الكسري:

إن التقريب الكسري من الدرجة N لتابع $f(x)$ على مجال مغلق $[a,b]$ هو حاصل قسمة الحدوديتين $p_n(x)$ و $q_m(x)$ من الدرجة n و m على الترتيب حيث $N=n+m$ و يحقق شروط معينة تبعاً لطريقة التقريب المستخدمة.

$$R_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \qquad ...(1)$$

أولاً:طريقة Pade :

و تتطلب هذه الطريقة:

1. أن يكون التابع $f(x)$ المقرب معرف على مجال I يحوي الصفر و مشتقاته مستمرة عند $x=0$ (أي تحليلي عند $x=0$) ، و هناك سببين لهذا الإختيار: الأول يعود لسهولة التعامل مع الصفر، و الثاني هو أنه يمكن بإجراء تغيير للمتحول أن ننقل جميع الحسابات من مجال ما $[a,b]$ إلى مجال يحوي الصفر مثل $[-1,1]$ وفق التحويل:

$$y = \frac{2x-(a+b)}{b-a}$$

إن الحدوديات في (1) تكتب بالشكل :

$$p_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k \qquad (2)$$

$$q_m(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_m x^m = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k \qquad (3)$$

٢. أن تبنى الحدوديات في (2) و (3) بحيث تتطابق $f(x)$ و$R_{n,m}(x)$ عند $x=0$

و تتطابق مشتقاتهما أيضاً حتى $n+m$ عند $x=0$.

ملاحظات:

١. $q_m(x) = 1$ التقريب الكسري هو نشر ماكلوران للدالة $f(x)$ من الدرجة n.

٢. من أجل قيمة مثبتة ل $n+m$ ، يكون الخطأ أصغرياً عندما يكون $n \le m$.

٣. المعامل الثابت في $q_m(x)$ لا يمكن أن يكون صفراً إذ يصبح $R_{n,m}(x)$ غير معرف عند الصفر .

٤. بما أن $q_0 \neq 0$ فإنه يمكن بتقسيم كل من $p_n(x)$ و $q_m(x)$ على q_0 أن نحصل على $q_0 = 1$ معامل ثابت ل $q_m(x)$ إذن الاختيار $q_0 = 1$ دائماً ممكن.

نتيجة : يوجد $n+m+1$ معامل ل $R_{n,m}(x)$ يجب حسابها .

لما اشترطت طريقة *Pade* أن يكون التابع $f(x)$ تحليلي فإن نشر ماكلوران للتابع $f(x)$ موجود وله الشكل:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \qquad \ldots\ldots\ldots(1')$$

و لدينا وفقاً لطريقة *Pade*

$$f^{(k)}(0) = R_{n,m}^{(k)}(0) \quad \ldots.(4)$$

حيث : $k = 0, 1, 2, \ldots, n + m$

و لكن وفقاً للمبرهنة:

إذا كان $f^{(k)}(0) = R^{(k)}_{n,m}(0)$ حيث $k = 0, 1, 2, \dots, n+m$ فإن التابع $f - R_{n,m}$ لا يملك حدود من قوى أقل أو تساوي $n+m$ و ذلك في جوار للصفر.

تكون لدينا المعادلة التقريبية التالية:

$$f(x) - \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \approx 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)q_m(x) - p_n(x)}{q_m(x)} \approx 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}{q_m(x)} \approx 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} q_i x^i - \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{j=n+m+1}^{\infty} c_j\, x^j$$

بالمطابقة بين أمثال $x^0, x^1, \dots, x^{n+m}$ في الطرف الأول مع مقابلاتها في الثاني نجد:

$$a_0 - p_0 = 0$$

$$q_1 a_0 + a_1 - p_1 = 0$$

$$q_2 a_0 + q_1 a_1 + a_2 - p_2 = 0$$

$$q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3 - p_3 = 0$$

....

....

و يمكن أن نكتب جملة المعادلات السابقة بالشكل:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q_{k-i} = p_k \; ; \; k = 0, 1, \dots, n + m \quad (5)$$

حيث نفرض:

$$p_{n+1} = p_{n+2} = \cdots = p_{n+m} = 0$$

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \cdots = q_{m+n} = 0$$

و تمثل (5) جملة معادلات خطية عددها n+m+1 معادلة ب n+m+1 مجهول و المجاهيل هي:

$$q_1, q_2, \dots, q_m, p_0, p_1, \dots, p_n.$$

و بحلها نحصل على $R_{n,m}(x)$ المنشود.

مثال:

أوجد تقريب $Pade$ $R_{3,2}(x)$ من الدرجة الخامسة للتابع:

$$f(x) = e^{-x}$$

الحل:

١. المدخلات :

$.f(x) = e^{-x}, n = 3, m = 2$

٢. المخرج: $R_{3,2}(x)$.

٣. اختبار $f(x)$ فيما إذا كان تحليلي في جوار $x=0$ وهذا واضح.

٤. كتابة نشر ماكلوران للدالة $f(x)$. $e^{-x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^i$

٥. نعوض في (5) فنحصل على جملة المعادلات:

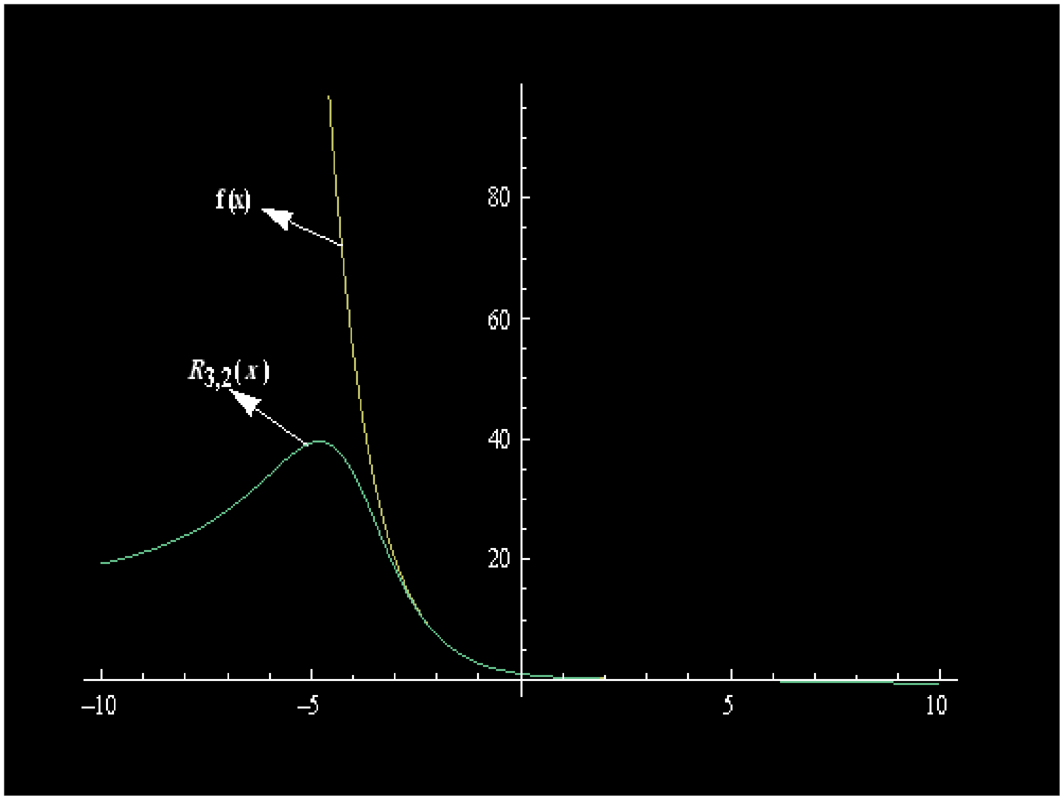
$$\left.\begin{aligned}
&x^5: -\frac{1}{120}+\frac{1}{24}q_1-\frac{1}{6}q_2=0\\
&x^4: \frac{1}{24}-\frac{1}{6}q_1+\frac{1}{2}q_2=0
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x^3: -\frac{1}{6}+\frac{1}{2}q_1-q_2=p_3\\
&x^2: \frac{1}{2}-q_1+q_2=p_2\\
&x^1: -1+q_1=p_1\\
&x^0: 1=p_0
\end{aligned}\right\}$$

$$p_0 = 1, p_1 = -\frac{3}{5}, p_2 = \frac{3}{20}, p_3 = -\frac{1}{60}$$

$$q_1 = \frac{2}{5}, q_2 = \frac{1}{20}$$

$$R_{3,2}(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \quad \ldots(6)$$



f(x)
$R_{3,2}(x)$
80
60
40
20
−10
−5
5
10

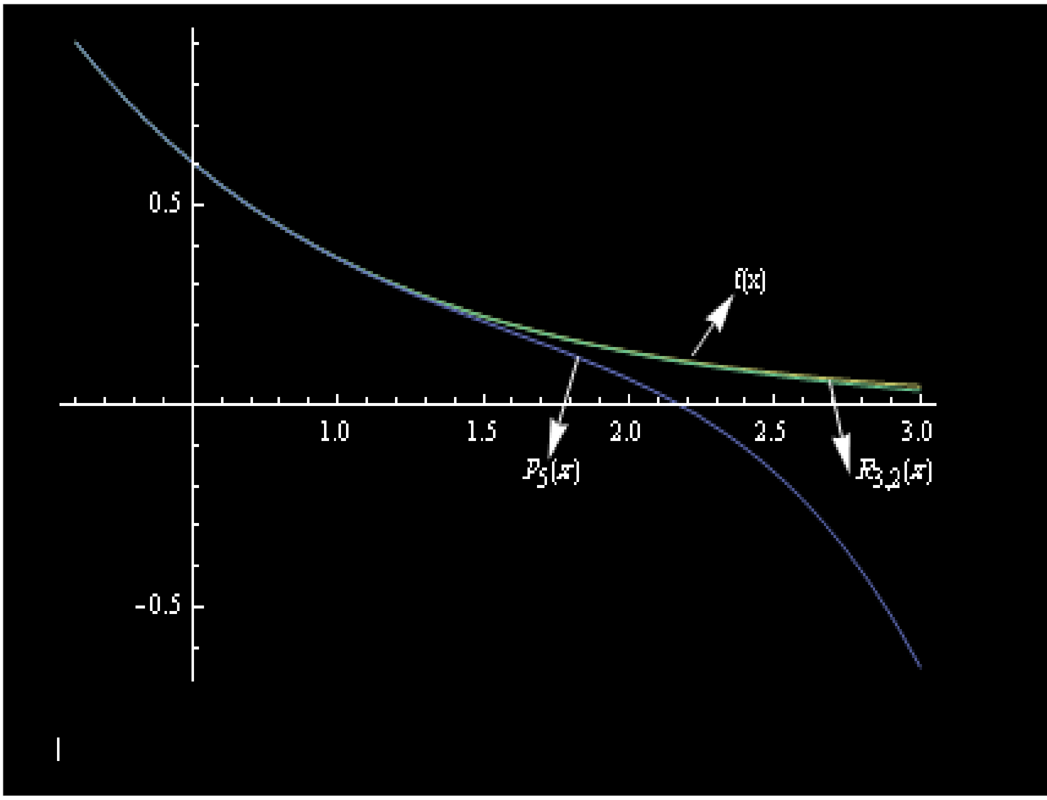
سوف نقارن الآن بين الخطأ الأعظمي في تقريب $f(x)$ إلى $P_5(x)$ و

الخطأ الأعظمي في تقريب $f(x)$ إلى $R_{3,2}(x)$ حيث:

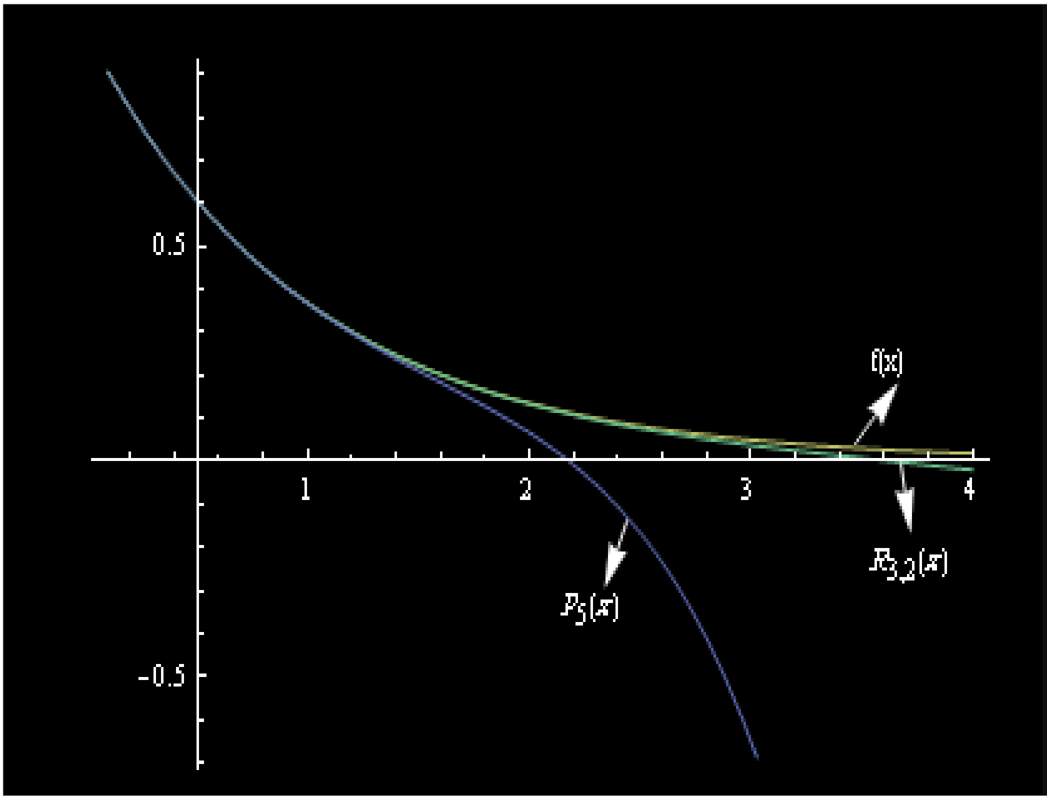
$$P_5(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5$$

من أجل بعض القيم.

x	e^{-x}	$P_5(x)$	$\lvert P_5(x) - e^{-x}\rvert$	$R_{3,2}(x)$	$\lvert R_{3,2}(x) - e^{-x}\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873067	8.64*10^-8	0.81873075	7.55*10^-9
0.4	0.67032005	0.67031467	5.38*10^-6	0.67031963	4.11*10^-7
0.6	0.54881164	0.54875200	5.96*10^-5	0.54880763	4.00*10^-6
0.8	0.44932896	0.44900267	3.26*10^-4	0.44930966	1.93*10^-5
1.0	0.36787944	0.36666667	1.21*10^-3	0.36781609	6.33*10^-5



0.5
-0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
f(x)
$P_5(x)$
$R_{3,2}(x)$



0.5
-0.5
1
2
3
4
f(x)
$P_5(x)$
$R_{3,2}(x)$

الكسور المستمرة:

مثال:اكتب التابعين الكسريين التاليين على شكل كسور مستمرة:

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2+2x+4} \quad , \quad \frac{2x^3+x^2-x+3}{3x^3+2x^2-x+1}$$

الحل:

أ. $$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2+2x+4} = 2x-7+\frac{10x+23}{x^2+2x+4}$$

$$= 2x - 7 + \cfrac{1}{\cfrac{x^2+2x+4}{10x+23}}$$

$$= 2x - 7 \cfrac{1}{\frac{1}{10}x - \frac{3}{100} + \frac{469/100}{10x+23}}$$

۲. $$\frac{2x^3+x^2-x+3}{3x^3+2x^2-x+1} = \frac{2}{3} + \cfrac{1}{-9x+3+\cfrac{1}{-\frac{1}{36}x-\frac{1}{24}+\frac{27/4}{12x-6}}}$$

و بنفس الأسلوب السابق نكتب $R_{3,2}(x)$ بالشكل:

$$R_{3,2}(x) = -\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}+\frac{-152/3}{(x+\frac{117}{19}+\frac{3125/361}{(x+(35/19))})} \quad ....(7)$$

$$R_{3,2}(x) = \frac{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3}{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2} \quad ...(6)$$

إن الشكل (7) أبسط من الشكل (6)، و ذلك لأنه في (6) يوجد 5 عمليات جمع(طرح) و 5 عمليات ضرب وعملية قسمة واحدة ، في حين في (7) يوجد 5 عمليات جمع(طرح) و عملية ضرب واحدة و عمليتي قسمة.

مثال: أنشئ تقريب Pade التالي:

$$\cos x \approx R_{4,4}(x) = \frac{15120-6900x^2+313x^4}{15120+660x^2+13x^4}$$

الحل :

نلاحظ أن كل من $R_{4,4}(x)$ و $\cos x$ توابع زوجية لذا سوف نفرض من أجل التبسيط

$$f(x) = \cos\sqrt{x}$$

فإن أوجدنا $R_{2,2}(x)$ ل $f(x)$ نكون قد أوجدنا $R_{4,4}(x)$ ل $\cos x$.

إن $f(x)$ تحليلي في جوار الصفر و نشر ماكلوران له يعطى بالشكل:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{40320}x^4 - \cdots$$

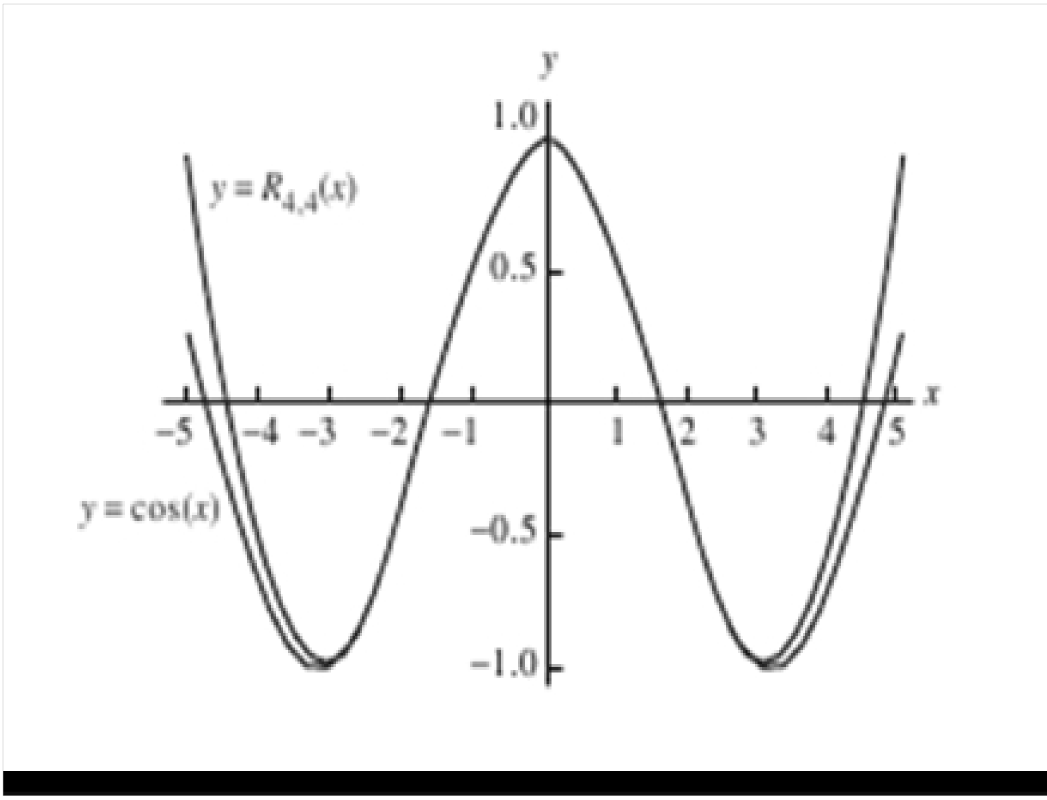
بالتعويض في *(5)* نحصل على المعادلات:

$$\left.\begin{aligned} 1 - p_0 &= 0 \\ \frac{-1}{2} + q_1 - p_1 &= 0 \\ \frac{1}{24} - \frac{1}{2} q_1 + q_2 - p_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{720} + \frac{1}{24} q_1 - \frac{1}{2} q_2 &= 0 \\ \frac{1}{40320} - \frac{1}{720} q_1 + \frac{1}{24} q_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

بحلها ينتج:

$$f(x) = \frac{1 - 115x/252 + 313x^2/15120}{1 + 11x/252 + 13x^2/15120} \qquad (*)$$


y
1.0
y = R_{4,4}(x)
0.5
x
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
y = cos(x)
−0.5
−1.0

مثال:أوجد تقريب *Pade* من الدرجة *6* حيث *n=m=3* للتابع:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

الحل: لنرى فيما إذا كان التابع $f(x)$ تحليلي في جوار الصفر ولنستنتج نشر ماكلوران له.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f(0) = 1$$

$$\acute{f}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \frac{-te^{-t}}{(1+xt)^2}dt$$

$$\acute{f}(0) = \int_0^\infty -\mathrm{te}^{-\mathrm{t}}\mathrm{dt}$$

$$f'(0) = \left[te^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t}dt$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2e^{-t}(1+xt)}{(1+xt)^4}dt$$

$$f''(0) = \int_0^\infty 2t^2 e^{-t}\,dt$$

$$f''(0) = 2(2!)$$

$$f'''(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-t}\left(3t(1+xt)^2\right)}{(1+xt)^6}dt$$

$$f'''(x) = \int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-t}\left(3t(1+xt)^2\right)}{(1+xt)^6}dt$$

$$f'''(0) = \int_0^{\infty} 2\times 3t^3 e^{-t}\,dt = 3!3!$$

وبالاستقراء على مرتبة الاشتقاق عند الصفر نجد:

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k (k!)^2$$

إذاً فالتابع المعطى تحليلي.

ومنه فإن متسلسلة ماكلوران:

$$f(x) = \sum_{k=0} (-1)^k k!\, x^k$$

$$f(x) = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 + \cdots$$

و ينتج لدينا باتباع طريقة ***Pade*** جملة المعادلات :

$$\left.\begin{aligned} &720 - 120q_1 + 24q_2 - 6q_3 = 0 \\ &-120 + 24q_1 - 6q_2 + 2q_3 = 0 \\ &24 - 6q_1 + 2q_2 - q_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &-6 + 2q_1 - q_2 + q_3 = p_3 \\ &2 - q_1 + q_2 = p_2 \\ &-1 + q_1 = p_1 \\ &1 = p_0 \end{aligned}\right\}$$

وبحلها نجد أن:

$$R_{3,3}(x) = \frac{1+11x+26x^2+6x^3}{1+12x+36x^2+24x^3}$$

أما شكل الكسور المستمرة فهو:

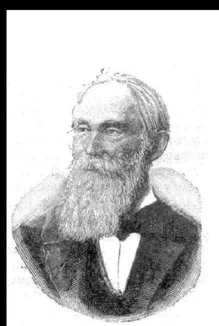
$$R_{3,3}(x) = \frac{1}{4} + \cfrac{1}{24x/17+40/289+\cfrac{1}{-4913x/198-64213199/7566372-\cfrac{901991/365077449}{198x/289+\cfrac{17}{193}}}}$$

ملاحظة:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = (-1)^n n!;\, n \ge 0$$

ثانياً:طريقة تشيبتشيف:

ولكي نحصل على تقريب كسريٍ ذي دقةً أكثر انتظاماً سوف نستخدم حدوديات تشيبتشيف و التي تسلك سلوك أكثر انتظاماً من حدوديات ماكلوران من خلال التقريب الكسريِ بطريقةً تشيبتشيف و تعتمد على نفس مبدأ طريقةً تقريب $Pade$ ولكن باستبدال كل x^{k} ب $T_{\mathrm{k}}(x)$ في العلاقات (2)و (3) و $(1')$ فإذا رمزنا لهذا التقريب ب$R_{\mathrm{T}}(x)$ فإن:



$$R_T(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x)}{\sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x)}$$

يدعى بتقريب تشيبتشيف الكسريِ للتابع f(x) والذي نشره وفق تشيبتشيف هو.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

و بنفس الأسلوب الذي اتبعناه في طريقة تقريب $Pade$ فإن:

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_k T_k(x) \sum_{k=0}^{m} q_k T_k(x) - \sum_{k=0}^{n} p_k T_k(x) \approx 0$$

و لكن عند المطابقة تظهر لدينا مشكلتين الأمر الذي يجعل هذه الطريقة أصعب من طريقة $Pade$:

الأولى هي في الحد الأول من المعادلة السابقة حيث أنه يتضمن جداءات لحدوديات تشيبتشيف و تحل هذه المشكلة باستخدام العلاقة

$$T_i(x)T_j(x) = \frac{1}{2}\left[T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x)\right]$$

و الثانية هي في حساب سلسلة تشيبتشيف للتابع $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_k T_k(x)$$

نظرياًهذا ليس صعب حيث لدينا من تعامد حدوديات تشيبتشيف :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad , \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad ; k \geq 1$$

مثال: إن الحدود الخمسة الأولى لنشر تشيبتشيف للتابع e^{-x} هي:

$$\widetilde{P}(x) = 1.266066T_0(x) - 1.130318T_1(x) + 0.271495T_2(x) - 0.044337T_3(x) + 0.005474\,T_4(x) - 0.000543T_5(x)$$

لتحديد تقريب تشيبتشيف الكسري من الدرجة الخامسة حيث n=3 و m=2 علينا اختيار p_i و q_i بحيث أنه من أجل k=0,1,2,3,4,5 أمثال $T_k(x)$ في المنشور التالي :

$$\widetilde{P}(x)[T_0(x) + q_1T_1(x) + q_2T_2(x)] - [p_0T_0(x) + p_1T_1(x) + p_2T_2(x) + p_3T_3(x)]$$

جميعها أصفار.بالحساب سنجد أن :

$$R_{\mathrm{T}}(x) = \frac{1.055265T_0(x) - 0.613016T_1(x) + 0.077478T_2(x) - 0.004506T_3(x)}{T_0(x) + 0.378331T_1(x) + 0.022216T_2(x)}$$

و لكن :

$$T_0(x) = 1\ , T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_0(x) = 4x^3 - 3x$$

بالتعويض في الصيغة السابقة سنجد أن :

$$R_{\mathrm{T}}(x) = \frac{0.977787 - 0.599499x + 0.154956x^2 - 0.018022x^3}{0.977784 + 0.378331x + 0.044432x^2}$$

x	e^{-x}	$R_{3,2}(x)$	$\lvert R_{3,2}(x) - e^{-x}\rvert$	$R_T(x)$	$\lvert R_T(x) - e^{-x}\rvert$
0.2	0.81873075	0.81873075	7.55*10^-9	0.81872510	5.66*10^-6
0.4	0.67032005	0.67031963	4.11*10^-7	0.67031310	6.95*10^-6
0.6	0.54881164	0.54880763	4.00*10^-6	0.54881292	1.28*10^-6
0.8	0.44932896	0.44930966	1.93*10^-5	0.44933809	9.13*10^-6
1.0	0.36787944	0.36781609	6.33*10^-5	0.36787155	7.89*10^-6