TRIGONOMETRIC APPROXIMATION

التقريب المثلثي

الدكتورة برلنت مطيط

تعريف : لنرمز بالرمز T_n لمجموعة جميع التراكيب الخطية

للدوال $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{2n-1}$ حيث:

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= \frac{1}{2} \\
\phi_k(x) &= \cos(kx) \quad for\ k = 1, 2, \cdots, n \\
\phi_{n+k}(x) &= \sin(kx) \quad for\ k = 1, 2, \cdots, n-1
\end{aligned}
$$

ندعو هذه المجموعة مجموعة الحدوديات المثلثية من درجة أقل

أو تساوي **n** .

ملاحظة: إن الدوال $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_{2n-1}$ متعامدة على المجال

$[-\pi,\pi]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x)=1$.

طريقة تقريب المربعات الصغرى المستمرة :

ليكن لدينا تابع $f\in C[-\pi,\pi]$ و نريد أن نوجد تقريب

المربعات الصغرى المستمرة بتوابع من T_n بالشكل:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+a_n\cos(nx)+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx; k = 0,1,\ldots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx; k = (0,)1,\ldots, n$$

$$(b_0 = 0)$$

مبرهنة(متسلسلة فوربيه):

إذا كان $f \in C[-\pi,\pi]$ فإن $S_n(x)$ تتقارب بانتظام إلى f على المجال $[-\pi,\pi]$ أي:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$$

مثال: أوجد متسلسلة فورييه للتابع

$$f(x) = \frac{x}{2}, -\pi \le x \le \pi$$

الحل: لنحسب المعاملات:

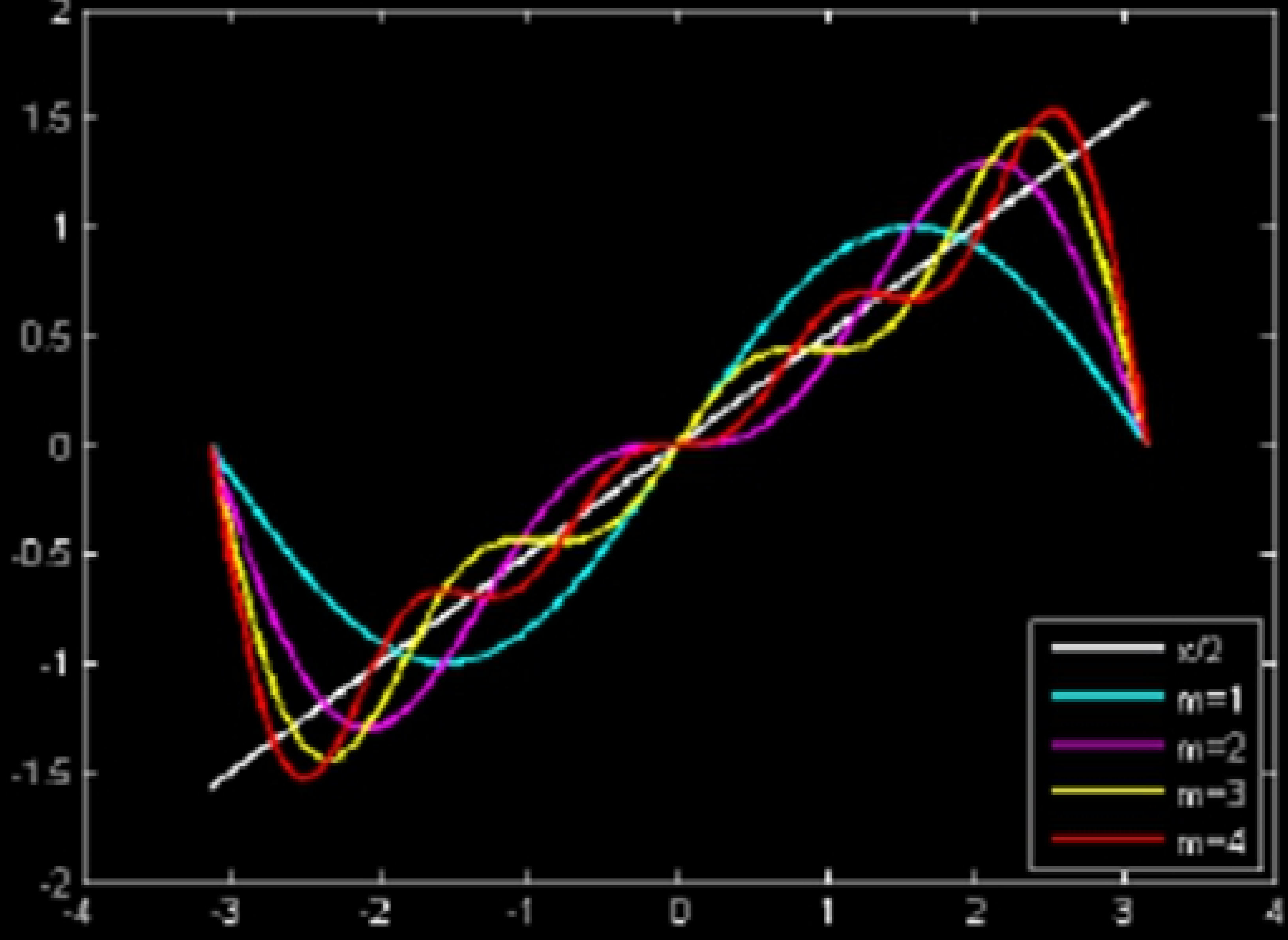
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} = \left[\frac{x^2}{4\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\cos jx dx = \left[\frac{x \sin jx}{2\pi j} + \frac{\cos jx}{2\pi j^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\ ,\quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\sin jx dx = \left[-\frac{x \cos jx}{2\pi j} + \frac{\sin jx}{2\pi j^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{j+1}}{j}\ ,\quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\sin jx$$

نلاحظ من المساواة الأخيرة أن المتسلسلة تحوي فقط دوال جيبية و يعود السبب في ذلك إلى أن التابع المعطى فردي.


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x/2
m=1
m=2
m=3
m=4

مثال:أوجد متسلسلة فورييه المنتهية للتابع:

$$. f(x) = |x|$$

الحل:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kxdx = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

من أجل **k=1,2,…,n** و $b_k = 0$ من أجل **k=1,2,…,n-1**

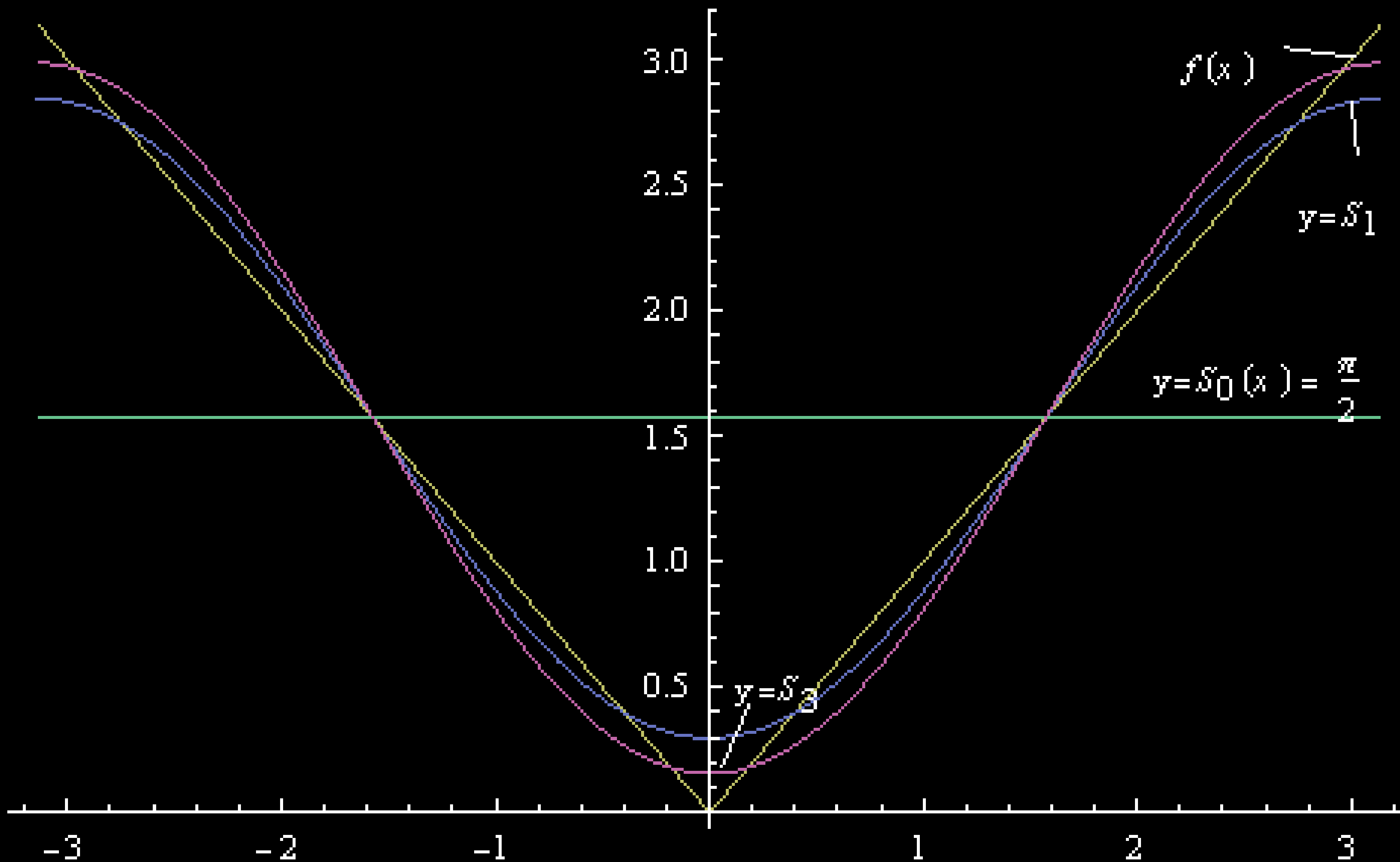
و بذلك فإن حدودية التقريب المثلثية لتابع القيمة المطلقة في

T_n هي:

$$S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos kx$$

نلاحظ هنا كما في المثال الأول أن الدوال الجيبية لا تظهر و

يعود السبب في ذلك إلى أن تابع القيمة المطلقة تابع زوجي.



f(x)
y=S1
y=S0(x) = π/2
y=S3
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
-3
-2
-1
1
2
3

ملاحظة: إذا كان $f(x)$ معرف ومستمر على فترة $[a,b]$

فإنه يكون معرف و مستمر على الفترة $[-\pi,\pi]$ وفق التحويل:

$$x = \frac{b-a}{2\pi}X + \frac{a+b}{2}$$

مثال: لنأخذ التابع $f(x) = ln(x)$ معرف على $[1,2]$ عندئذ

بإجراء التحويل: $x = \frac{1}{2\pi}X + \frac{3}{2}$ يصبح

$$f(X) = ln(\frac{1}{2\pi}X + \frac{3}{2})$$

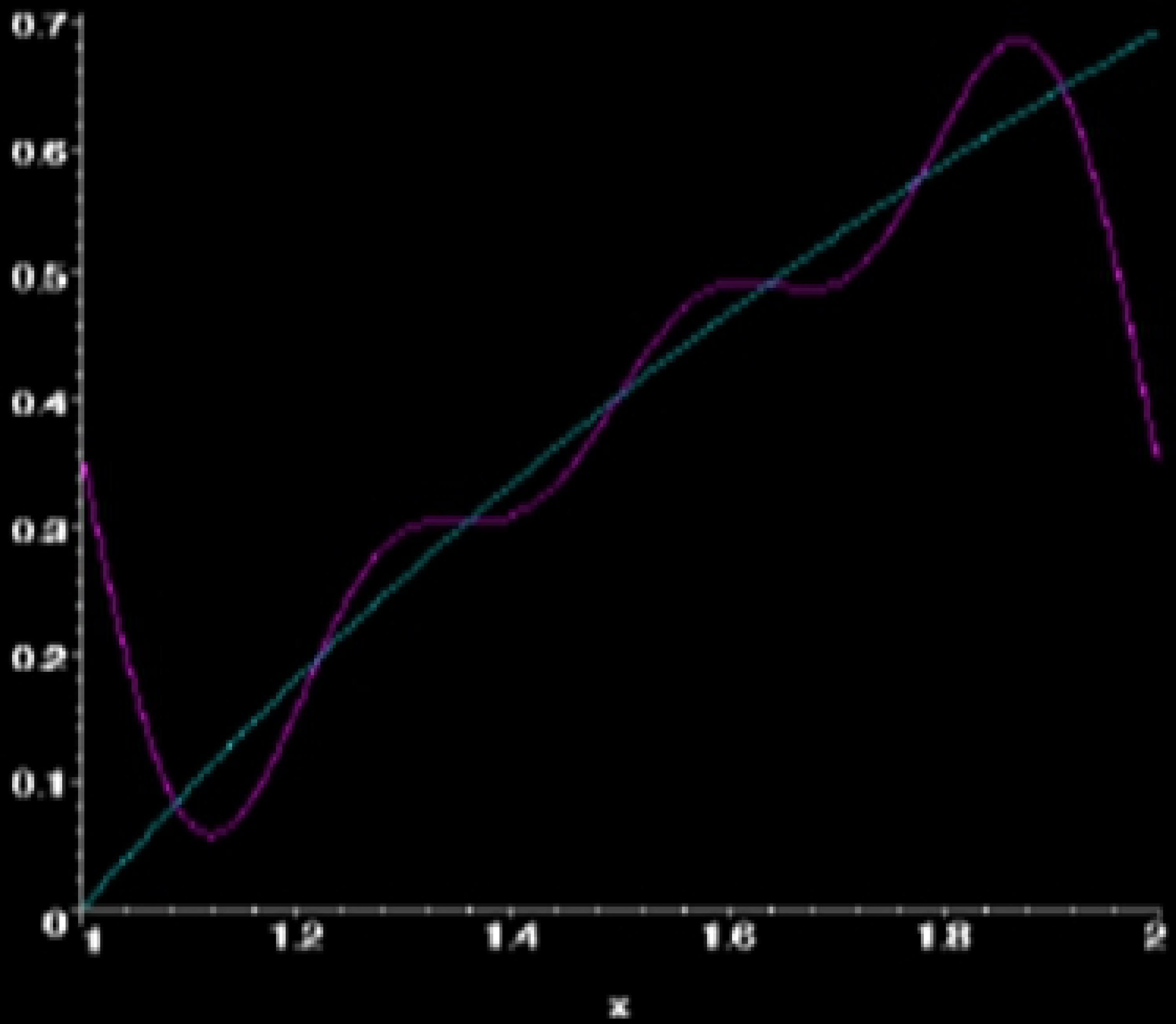
معرف و مستمر على $[-\pi,\pi]$ و نجد بالحساب العددي:

$$3.67608 + 0.023558\cos X + 0.215401\sin X$$
$$-0.00620228\cos 2X - 0.109594\sin 2X$$
$$+0.00278771\cos 3X + 0.0733257\sin 3X$$

هو التقريب المثلثي المستمر من الدرجة الثالثة للتابع الأخير

و من ثم بتعويض X بدلالة x نحصل على التقريب المثلثي من

الدرجة الثالثة للتابع الأصلي على المجال $[1,2]$.



0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x

تقريب المربعات الصغرى المنفصلة:

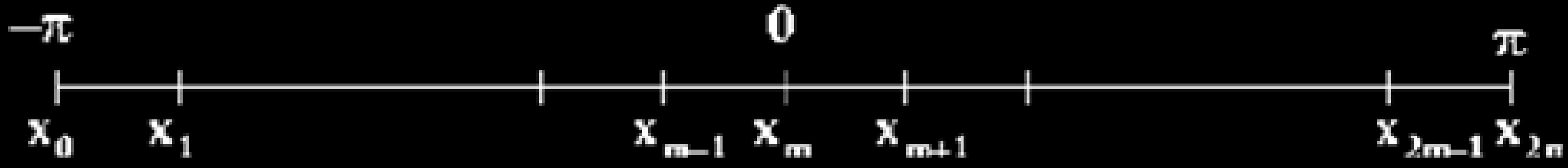
بفرض لدينا جماعة مؤلفة من $2m$ من الأزواج $\{(x_j , y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$

المعلومة بحيث تجزئ المساقط الأولى فيها مجال مغلق بشكل

متساوي سنفرض (ما يناسبنا) أن ذلك المجال هو $[-\pi , \pi]$

عندئذ: $x_j = -\pi + (\frac{j}{m})\pi$ حيث $j=0,1,\ldots,2m-1$

كما في الشكل التالي:



إن الهدف في هذه الحالة هو تحديد الحدودية المثلثية $S_n(x) \in T_n$

التي تجعل المقدار :

$$E(a_0,\dots,a_n,b_1,\dots,b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

أصغر ما يمكن و الذي يمثل تابع الخطأ .أي علينا اختيار

معاملات الحدودية المثلثية $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}$ بحيث

يكون ذلك المقدار صغيراً.

تمهيدية :إذا لم يكن r من مضاعفات $2m$ فإن :

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j = 0$$

و أكثر من ذلك إذا لم يكن r من مضاعفات m فإن:

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\sin rx_j)^2 = m \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = m$$

مبرهنة:إن الثوابت في المجموع

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

والتي تجعل مجموع المربعات الصغرى

$$E(a_0,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

أصغر مايمكن هي:

$$a_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j$$ حيث $k=0,1,\ldots,n$

و $$b_k = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$$ حيث $k=1,2,\ldots,n-1$

مثال: ليكن $f(x) = 2x^2 - 9$ حيث $x \in [-\pi, \pi]$. أوجد الحدودية المثلثية من الدرجة الثانية بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة و ذلك من أجل $m=3$.

الحل: إن العقد هي

$$y_j = f(x_j) = 2x_j^2 - 9 \ ; \ j=0,1,2,3,4,5 \ ,$$

$$x_j = -\pi + \left(\frac{j}{m}\right)\pi$$

والحدودية المثلثية هي

$$S_2(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_2 \cos 2x + (a_1 \cos x + b_1 \sin x)$$

حيث: $a_k = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5} y_j \cos kx_j$ من أجل $k=o,1,2$ و

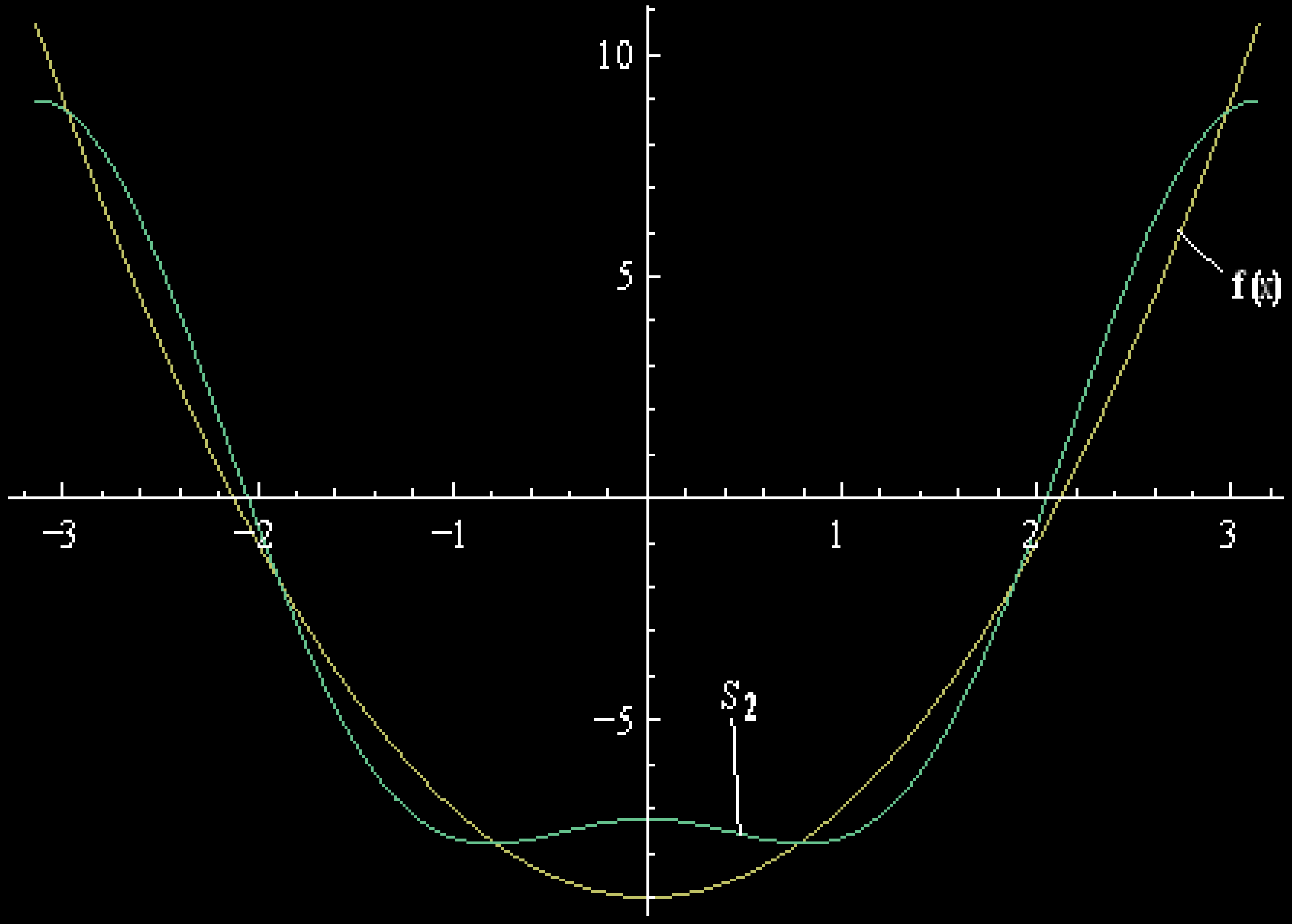
$$b_1 = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5} y_j \sin kx_j$$

بالحساب نجد :

$$a_0 = -4.1094456 \ , a_1 = -8.77298169 \ , a_2 = 2.92432723 \ , b_1 = 0$$

و هكذا:

$$S_2(x) = \frac{1}{2}(-4.1094456\ ) + 2.92432723\ \cos 2x - 8.1094456\ \cos x$$


10
5
−5
−3
−2
−1
1
2
3
f(x)
S_2

تلخيص

التقريب الكسري:

1. طريقة Pade

الكسور المستمرة

2. طريقة Tchybshev

التقريب المثلثي:

1. طريقة المربعات الصغرى المستمرة

TRIGONOMETRIC APPROXIMATION

التقريب المثلثي

الدكتورة برلنت مطيط

تعريف : لنرمز بالرمز T_n لمجموعة جميع التراكيب الخطية

للدوال $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{2n-1}$ حيث:

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= \frac{1}{2} \\
\phi_k(x) &= \cos(kx) \quad \textit{for } k = 1, 2, \cdots, n \\
\phi_{n+k}(x) &= \sin(kx) \quad \textit{for } k = 1, 2, \cdots, n-1
\end{aligned}
$$

ندعو هذه المجموعة مجموعة الحدوديات المثلثية من درجة أقل

أو تساوي n .

ملاحظة: إن الدوال $\phi_0,\phi_1,...,\phi_{2n-1}$ متعامدة على المجال $[-\pi,\pi]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x)=1$.

طريقة تقريب المربعات الصغرى المستمرة :

ليكن لدينا تابع $f\in C[-\pi,\pi]$ و نريد أن نوجد تقريب المربعات الصغرى المستمرة بتوابع من T_n بالشكل:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+a_n\cos(nx)+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx; k = 0,1,\ldots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx; k = (0,)1,\ldots, n$$

$$(b_0 = 0)$$

مبرهنة(متسلسلة فورييه):

إذا كان $f \in C[-\pi,\pi]$ فإن $S_n(x)$ تتقارب بانتظام إلى f على المجال $[-\pi,\pi]$ أي:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$$

مثال: أوجد متسلسلة فورييه للتابع

$$f(x) = \frac{x}{2}, -\pi \leq x \leq \pi$$

الحل: لنحسب المعاملات:

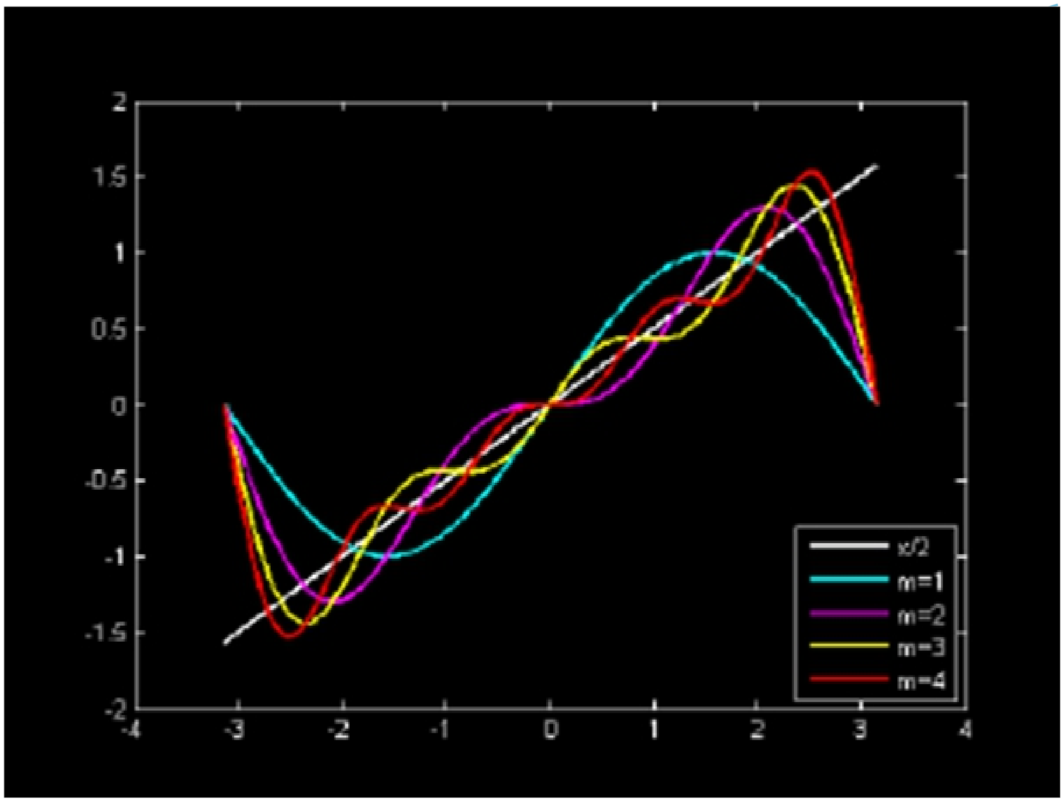
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} = \left[\frac{x^2}{4\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \cos jx dx = \left[\frac{x \sin jx}{2\pi j} + \frac{\cos jx}{2\pi j^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 , \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin jx dx = \left[-\frac{x \cos jx}{2\pi j} + \frac{\sin jx}{2\pi j^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{j+1}}{j} , \quad j = 1,2,3,\ldots$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\sin\ jx$$

نلاحظ من المساواة الأخيرة أن المتسلسلة تحوي فقط دوال جيبية و يعود السبب في ذلك إلى أن التابع المعطى فردي.



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x/2
m=1
m=2
m=3
m=4

مثال: أوجد متسلسلة فورييه المنتهية للتابع:

$$f(x) = |x| .$$

الحل:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx = \pi$$

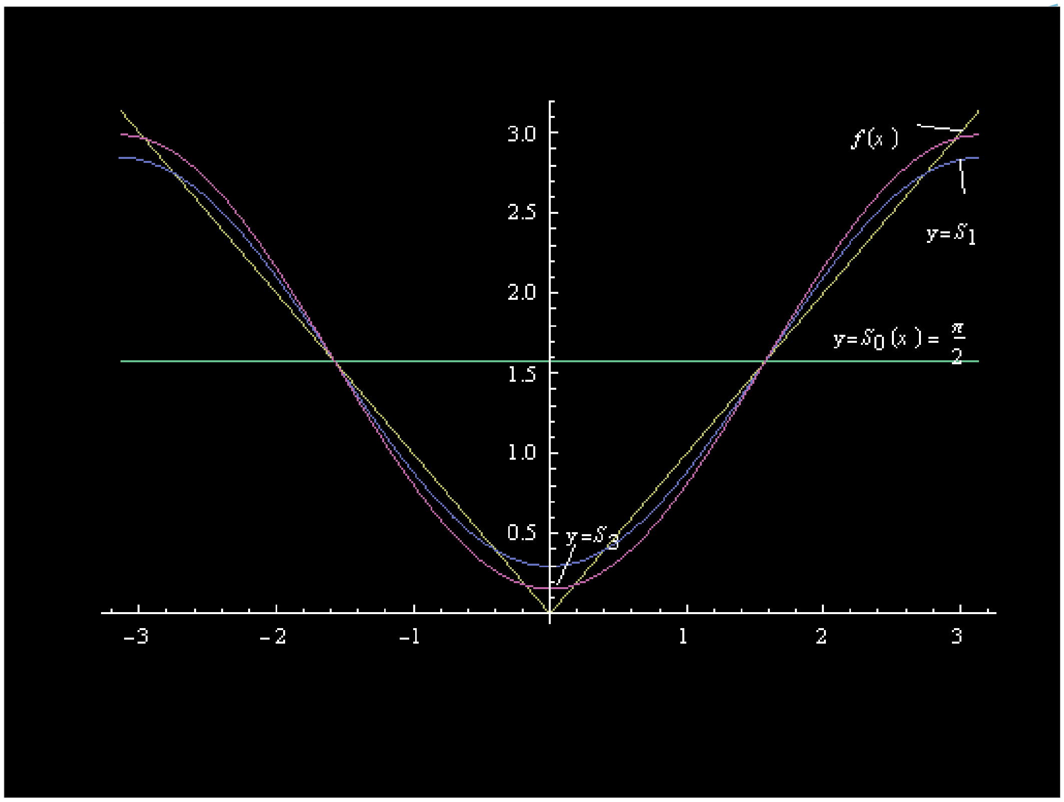
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]$$

من أجل **k=1,2,…,n** و $b_k = 0$ من أجل **k=1,2,…,n-1**

و بذلك فإن حدودية التقريب المثلثية لتابع القيمة المطلقة في T_n هي:

$$S_n(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos kx$$

نلاحظ هنا كما في المثال الأول أن الدوال الجيبية لا تظهر و يعود السبب في ذلك إلى أن تابع القيمة المطلقة تابع زوجي.



f(x)
y=S_1
y=S_0(x) = π/2
y=S_3

ملاحظة: إذا كان $f(x)$ معرف ومستمر على فترة $[a,b]$

فإنه يكون معرف و مستمر على الفترة $[-\pi,\pi]$ وفق التحويل:

$$x=\frac{b-a}{2\pi}X+\frac{a+b}{2}$$

مثال: لنأخذ التابع $f(x)=ln(x)$ معرف على $[1,2]$ عندئذ

بإجراء التحويل: $x=\frac{1}{2\pi}X+\frac{3}{2}$ يصبح

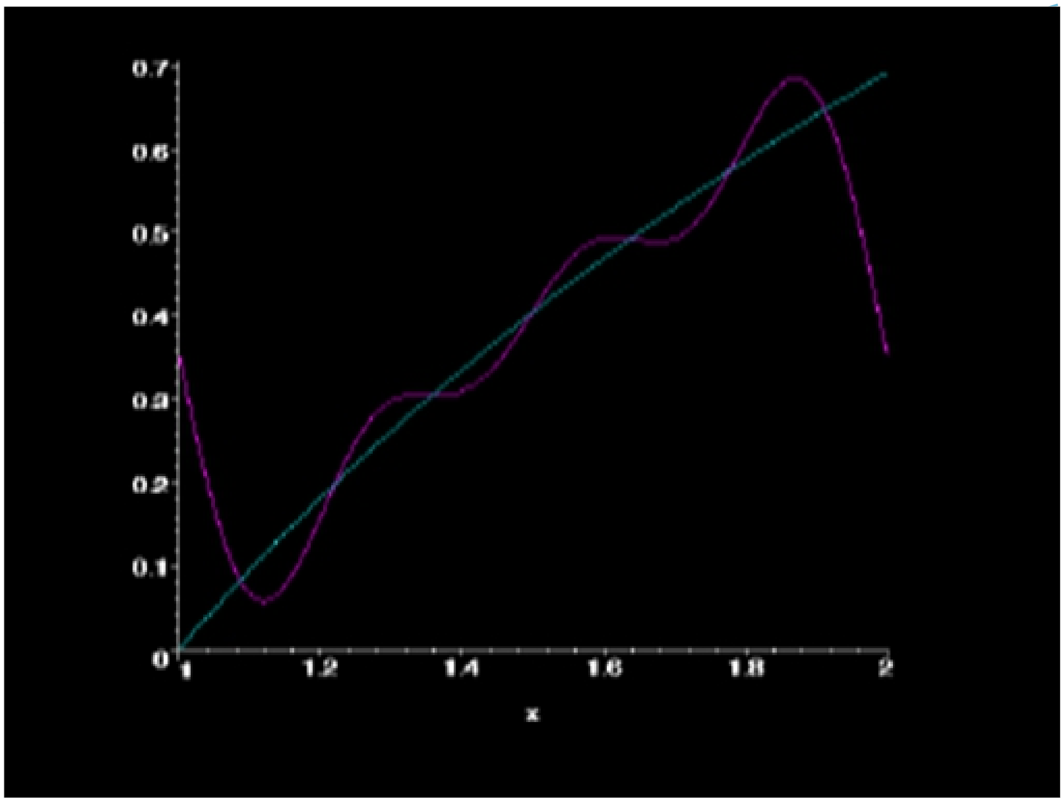
$$f(X)=ln(\frac{1}{2\pi}X+\frac{3}{2})$$

معرف و مستمر على $[-\pi,\pi]$ و نجد بالحساب العددي:

$$3.67608 + 0.023558\cos X + 0.215401\sin X$$
$$-0.00620228\cos 2X - 0.109594\sin 2X$$
$$+0.00278771\cos 3X + 0.0733257\sin 3X$$

هو التقريب المثلثي المستمر من الدرجة الثالثة للتابع الأخير

و من ثم بتعويض X بدلالة x نحصل على التقريب المثلثي من الدرجة الثالثة للتابع الأصلي على المجال $[1,2]$.



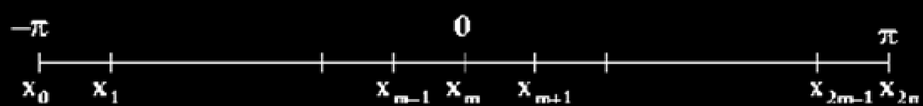
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
x

تقريب المربعات الصغرى المنفصلة:

بفرض لدينا جماعة مؤلفة من $2m$ من الأزواج $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^{2m-1}$ المعلومة بحيث تجزئ المساقط الأولى فيها مجال مغلق بشكل متساوي سنفرض (ما يناسبنا) أن ذلك المجال هو $[-\pi, \pi]$

عندئذ: $x_j = -\pi + (\frac{j}{m})\pi$ حيث $j=0,1,\dots,2m-1$

كما في الشكل التالي:



إن الهدف في هذه الحالة هو تحديد الحدودية المثلثية $S_n(x) \in T_n$

التي تجعل المقدار :

$$E(a_0,\dots,a_n,b_1,\dots,b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

أصغر ما يمكن و الذي يمثل تابع الخطأ .أي علينا اختيار

معاملات الحدودية المثلثية $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}$ بحيث

يكون ذلك المقدار صغيراً.

تمهيدية :إذا لم يكن r من مضاعفات $2m$ فإن :

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \sin rx_j = 0 \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} \cos rx_j = 0$$

و أكثر من ذلك إذا لم يكن r من مضاعفات m فإن:

$$\sum_{j=0}^{2m-1} (\sin rx_j)^2 = m \quad \text{و} \quad \sum_{j=0}^{2m-1} (\cos rx_j)^2 = m$$

مبرهنة:إن الثوابت في المجموع

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

والتي تجعل مجموع المربعات الصغرى

$$E(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

أصغر مايمكن هي:

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j$$ حيث ***k=0,1,… ,n***

و $$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$$ حيث ***k=1,2,… ,n-1***

مثال:ليكن $f(x) = 2x^2 - 9$ حيث $x \in [-\pi, \pi]$. أوجد الحدودية المثلثية من الدرجة الثانية بطريقة المربعات الصغرى المنفصلة و ذلك من أجل $m=3$.

الحل: إن العقد هي

$$y_j = f(x_j) = 2x_j^2 - 9 \; ; \; j=0,1,2,3,4,5$$

$$x_j = -\pi + \left(\frac{j}{m}\right)\pi$$

والحدودية المثلثية هي

$$S_2(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_2 \cos 2x + (a_1 \cos x + b_1 \sin x)$$

حيث: $a_k = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5} y_j \cos kx_j$ من أجل ***k=o,1,2*** و

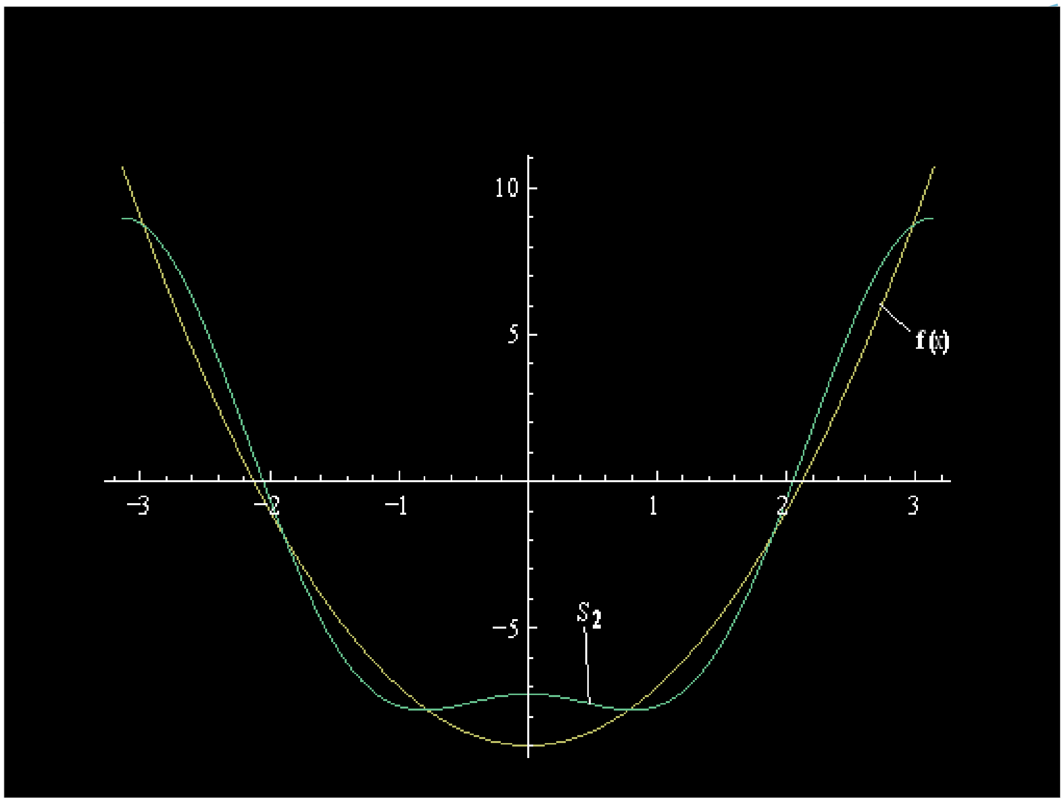
$$b_1 = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5} y_j \sin kx_j$$

بالحساب نجد :

$$a_0 = -4.1094456 \; , a_1 = -8.77298169 \; , a_2 = 2.92432723 \; , b_1 = 0$$

و هكذا:

$$S_2(x) = \frac{1}{2}(-4.1094456\;) + 2.92432723\;\; \cos 2x - 8.1094456\;\; \cos x$$


10
5
−5
−3
−2
−1
1
2
3
f(x)
S_2

تلخيص

التقريب الكسري:

الكسور المستمرة

1. طريقة Pade

2. طريقة Tchybshev

التقريب المثلثي:

1. طريقة المربعات الصغرى المستمرة